UNIVERSIDAD DE MURCIA

Posgrado de Matemáticas

Máster Universitario en Matemática Avanzada y Profesional

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Filtros y sus aplicaciones

Antonio Pérez Hernández

Curso 2012-13

Dedicatoria

A mis padres y hermana, que me soportan a pesar de mi estado continuo de neurosis.

A mis amigos de la carrera, con los que he compartido los mejores momentos de estos seis últimos años.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi tutor Bernardo Cascales todo el apoyo prestado; las muy fructíferas conversaciones que hemos mantenido; la introducción a muy diversos temas y la libertad para estudiar lo que me gustara; por su trato cercano y por darme la posibilidad de conocer a gente con cuyos libros y artículos aprendo y me divierto día tras día.

También doy las gracias en orden alfabético: a Antonio Avilés, que me ha enseñado a podar árboles y que siempre tiene algún consejo o idea para atacar un problema; a Vladimir Kadets, siempre dispuesto a hablar de matemáticas, sobre cualquier tema y en cualquier momento; a Matías Raja, por enseñarme a dar bocados a conjuntos y por sus ideas que me han motivado a trabajar y aprender más.

Always be scientifically critical, as well as socially honest, adhere to the highest ethical principles, especially in the face of temptation ...which will come!

Paul Embrechts

Trabajo Fin de Máster

Filtros y sus aplicaciones

Antonio Pérez Hernández

dirigida por

Bernardo Cascales Salinas

Introducción

EL concepto de filtro está ampliamente extendido en la comunidad matemática. Aunque su origen se atribuye a Henri Cartan, pueden encontrarse artículos anteriores y coetáneos cuyos autores utilizan familias de conjuntos con ciertas propiedades a los que no dotan de nombre propio, pero que hoy reconoceríamos rápidamente como filtros. Se trata pues de un concepto "natural" que surge en diversos ámbitos, aunque parece que no hay duda que es Cartan quien lo sistematiza y le dota de una teoría propia.

Los filtros son un objeto matemático de interés en dos sentidos. Por un lado, son interesantes en sí mismos desde el punto de vista de la teoría de conjuntos y de la teoría descriptiva de conjuntos; y por otro, los filtros se han revelado como poderosas herramientas para obtener resultados en casi todas las ramas de las matemáticas: teoría de conjuntos (en particular, en teoría de modelos), topología, teoría de la medida (por ejemplo, para dar una prueba elemental de la existencia de liftings), análisis funcional (ultraproductos de espacios de Banach), teoría de Ramsey, teoría de números (teoremas de Hindman y van der Waerden), sistemas dinámicos, etc.

En esta memoria nos proponemos estudiar problemas relacionados con el concepto de filtro así como algunas de sus aplicaciones.

Si bien pudiera parecer que el presente trabajo es excesivamente largo, es necesario remarcar que no se trata de un trabajo de simple recopilación de información, sino que la organización, buena parte de los detalles así como algunos resultados y demostraciones, especialmente en los apéndices, son originales. El trabajo se estructura en dos partes: los primeros cuatro capítulos constituyen la primera parte, en la que se tratan diversos temas a los que se intenta dotar de una organización personal con pequeñas aportaciones para simplificar, generalizar o simplemente ofrecer puntos de vista distintos de los resultados estudiados. La segunda parte está formada por los apéndices y tiene una faceta investigadora.

A continuación se presenta un breve resumen de los contenidos de cada capítulo y apéndice. Al comienzo de los mismos el lector encontrará una descripción más detallada tanto de la motivación como de los contenidos.

Capítulo 1: Filtros y compacidad

Introducimos el concepto de $\mathscr{A}$-filtro como una generalización de los filtros usuales y de los Z-filtros introducido por Frink [36]. Desarrollamos para los $\mathscr{A}$-filtros unos resultados similares a los de la teoría usual de filtros: bases de filtro, convergencia, puntos adherentes, ultrafiltros, etc. Veremos que aparecen algunas diferencias significativas con respecto a los filtros usuales, ya que las propiedades de los $\mathscr{A}$-filtros vienen determinadas por las características de la familia de partida $\mathscr{A}$.

La segunda parte del capítulo se centra en los filtros usuales: filtros a través de aplicaciones y producto de filtros. La última parte está enfocada al estudio de los filtros compactoides, un tipo especial de filtros que comparten muchas características con los filtros sobre espacios compactos pero que pueden encontrarse en espacios más generales. Como aplicación se prueban los teoremas de Wallace y Tychonoff.

Capítulo 2: Compactificaciones

En la primera parte usamos $\mathscr{A}$-filtros para construir la denominada compactificación tipo Wallman $\mathscr{A}(X)$ de un espacio topológico X que posee una base normal $\mathscr{A}$. Damos una prueba detallada de tal construcción siguiendo [36], pero obteniendo algunas propiedades adicionales que ayudan a entender mejor las propiedades y estructura del espacio. Probaremos un teorema que caracteriza aquellas funciones continuas sobre X y con valores en un compacto Hausdorff K que se pueden extender a una función continua definida sobre la compactificación de Wallman $\mathscr{A}(X)$ de dicho espacio.

Como caso particular se demuestra que para todo espacio completamente regular la familia de los conjuntos cero constituye una base normal, y que la compactificación tipo Wallman correspondiente es precisamente la de Stone-Čech. Finalizamos el capítulo dando una descripción más detallada de la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto, así como una pequeña recopilación con referencias de algunas de las propiedades más destacadas de $\beta\mathbb{N}$.

Capítulo 3: Límites a través de filtros

Comenzamos definiendo el límite de una función $f : I \to X$ a través de un filtro $\mathscr{F}$ sobre I, relacionándolo con conceptos de los anteriores capítulos y obteniendo algunas propiedades como el hecho de que el límite de una función cuyo rango está contenido en un conjunto compacto siempre posee un límite a través de cualquier ultrafiltro.

Para cada ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre un conjunto no vacío I y cualquier espacio de Banach dual E^* definimos la aplicación $T_{\mathscr{U}} : \ell_\infty(I,E^*) \to E^*$ que asocia a cada función acotada $f : I \to (E^*, \omega^*)$ su límite a través de $\mathscr{U}$. Probamos que se trata de aplicación lineal, continua y multiplicativa. Además en el caso $E = E^* = \mathbb{R}$ damos una caracterización de dichas aplicaciones como los funcionales lineales y multiplicativos del dual $\ell_\infty(I,\mathbb{R})^*$.

Usando los funcionales $T_{\mathscr{U}}$ anteriores se prueba la existencia de límites de Banach vectorvaluados en espacios de Banach 1-complementados, resultado que aparece en un reciente artículo [8].

La siguiente sección recoge en detalle una prueba del teorema de Jerison que establece que los límites de Banach en $\mathbb{R}$ se pueden obtener como la envoltura convexa de un cierto conjunto de funciones definidas usando límites a través de ultrafiltros, resultado en cuya prueba se combinan el teorema ergódico de Birkhoff y el teorema de representación de Riesz.

Finalizamos el capítulo introduciendo y probando algunas propiedades de ultraproductos de los espacios de Banach que son utilizados en el capítulo siguiente.

Capítulo 4: Estabilidad en espacios de Banach

Exponemos con detalles la prueba del siguiente resultado [7]: *un espacio de Banach infinito-dimensional débilmente estable posee una copia casi isométrica de algún* ℓ^p *(*$1 \leq p < \infty$*) o de* c_0. Dado que en el artículo [7] predominan las referencias a conceptos y resultados de otros artículos y libros, nos parece interesante elaborar un capítulo en el que se recogen y detallan todas estas nociones. Por otro lado, hemos presentado algunos conceptos y resultados de una manera diferente y creemos que más accesible inspirándonos en el magnífico trabajo de Luis Blanco [66], como por ejemplo la construcción del espacio de tipos de un espacio de Banach separable. También introducimos el *spreading model* de una manera distinta a la referencia [7], y además adaptamos argumentos de [66] sobre funciones separadamente continuas para dar una demostración autocontenida de la última parte del capítulo, en contraste con la prueba original de [7].

Apéndice A: $\mathscr{F}$-bases y propiedad del subcubrimiento

Este apéndice recoge algunos resultados originales de un preprint realizado de manera conjunta con los Profesores Antonio Avilés (Universidad de Murcia), Vladimir Kadets (Universidad de Kharkov, Ucrania) y Slawomir Solecki (Universidad de Urbana-Champaign, Illinois, USA). La motivación viene dada por el problema de determinar si las funciones coordenadas e_k^* de una $\mathscr{F}$-base de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ son necesariamente continuas. Algunos resultados parciales muestran que, por ejemplo, si $\mathscr{F}$ es numerablemente generado entonces los funcionales sí son continuos.

Una condición suficiente sobre el filtro $\mathscr{F}$ que garantiza la continuidad de los funcionales es la siguiente: para cada espacio métrico completo X y cada familia de subconjuntos de primera categoría $\{X_A : A \in \mathscr{F}\}$ en X verificando que $A \subseteq^* B$ implica $X_B \subseteq X_A$, se tiene que $\cup_{A\in\mathscr{F}} X_A \neq X$. Esta propiedad se puede reformular en términos de ideales, un concepto dual al de filtro. Estudiaremos aquellos ideales que verifican la propiedad anterior cuando en lugar de conjuntos de primera categoría se toman conjuntos densos en ninguna parte (condición más débil). Damos caracterizaciones de este tipo de ideales y estudiamos si tienen esta propiedad algunas familias bien conocidas de ideales, como los ideales analíticos y una generalización de P-ideal no numerablemente generado.

Apéndice B: Lifting y descomposición de medidas finitamente aditivas

En la primera sección exponemos en detalles una prueba autocontenida (usando ultrafiltros) de la existencia de *liftings* en espacios de medida finita completos (Ω, Σ, μ). Un *lifting* nos proporciona una subálgebra “densa” $\mathscr{M}$ de Σ, en el sentido de que para cualquier elemento $A \in \Sigma$ existe otro elemento $B \in \mathscr{M}$ tal que $\mu(A\Delta B) = 0$. Lo interesante de $\mathscr{M}$ es que al mismo tiempo verifica que el único conjunto de medida nula que contiene es el conjunto vacío.

En las secciones siguientes, usamos esta noción para dar una serie de pruebas originales discutidas con el Prof. Bernardo Cascales que permiten obtener un teorema de descomposición de medidas finitamente aditivas $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ y μ-continuas en el que se demuestran a la vez los siguientes resultados: el teorema de descomposición de Hewitt-Yoshida para medidas finitamente aditivas μ-continuas, el teorema de Radon-Nikodým, así como una caracterización de Hewitt y Yoshida de las medidas denominadas puramente finitamente aditivas.

El hecho más remarcable es que a partir de la medida λ y un *lifting* en (Ω, Σ, μ) se puede construir una red $(s_\pi)_{\pi \in \mho}$ de funciones simples de la forma

$$s_\pi = \sum_{A \in \pi} \frac{\lambda(A)}{\mu(A)} \chi_A$$

indexada en un conjunto dirigido de particiones finitas de Ω. Probaremos que dicha red converge μ-casi seguramente a una función integrable que coincide con la derivada de Radon-Nikodým f de la parte numerablemente aditiva de λ. Por otro lado, si vemos dicha red en $L^1(\mu) \subseteq L^1(\mu)^{**}$ (embebimiento natural de un espacio de Banach en su bidual) entonces converge en la topología ω^* a un elemento $y^{**} \in L^1(\mu)^{**}$ que la representa de una manera similar al teorema de Radon-Nikodým (prueba en la que usamos ultrafiltros). Demostramos entre otras cosas que la distancia de y^{**} a $L^1(\mu)$ se alcanza precisamente en f.

Apéndice C: Índices de Radon-Nikodým

Se recogen algunos resultados de un preprint realizado junto con los Profesores Bernardo Cascales y Matías Raja (Universidad de Murcia). Esta investigación tuvo inicio en la búsqueda (usando ultrafiltros) de funciones con propiedades similares a la derivada de Radon-Nikodým para medidas vector-valuadas en espacios de Banach sin la propiedad de Radon-Nikodym, y derivó en la búsqueda de versiones cuantitativas de resultados conocidos en el estudio de la propiedad de Radon-Nikodým. Introducimos un índice de representabilidad de medidas vectoriales $m : \Sigma \to E$ y unos índices de dentabilidad que relacionaremos entre sí a través de desigualdades, lo que cuantifica y ofrece puntos de vista distintos de resultados clásicos.

Introducimos nuevas nociones como el de *derivada Gelfand* ψ de una medida $m : \Sigma \to E^*$, que al contrario que la derivada de Radon-Nikodým siempre existe; y con la remarcable propiedad de que la medibilidad de ψ equivale a la representabilidad de la medida de partida m, siendo además ψ la derivada de Radon-Nikodým de m cuando esta última es representable. La existencia de una tal función se prueba usando ultrafiltros.

El resultado final del capítulo es una cuantificación del celebrado resultado de que todo operador débilmente compacto es representable.

Contenidos

Capítulo 1

Filtros y compacidad

Las nociones de filtro, convergencia a través de filtro, etc. se consideran tradicionalmente introducidas por Henri Cartan [16], [17] como una alternativa al concepto de red que había sido introducido por E. H. Moore y H. L. Smith en su artículo *A general Theory of Limits* (1922). No obstante, algunos autores [62], [63] señalan que los filtros fueron usados ya por L. Vietoris bajo el nombre de *kräntze*, antes de que Cartan publicara los primeros artículos al respecto. Incluso Dudley [28, p. 76] afirma que Caratheodory usó bases de filtro en [15] y que M. H. Stone trató con filtros en [71]. De acuerdo con Comfort [22], los ultrafiltros parece que fueron introducidos por primera vez, y demostrada su existencia (en $\mathbb{N}$), por F. Riesz [65] y Ulam [75]. Sin duda todo esto muestra que los filtros eran una estructura que de manera natural surge en diversos ámbitos de matemáticas, aunque parece que no hay duda de que quien aisló la idea de filtro de filtro dotándolo de entidad propia fue Henri Cartan.

El concepto de filtro puede definirse sobre cualquier conjunto parcialmente ordenado, en particular retículos, que tienen la propiedad adicional de que cualquier subconjunto finito tiene un supremo y un ínfimo. No obstante, no vamos a usar la notación de retículos, sino otra que se basa en la definición de Z-filtro introducida por Frink en [36], que a su vez se inspira en un concepto usado por Wallman en [77] para construir compactificaciones. Señalar que Wallman usa en su artículo familias de conjuntos que realmente son ultrafiltros, aunque él no utiliza esta palabra en ningún momento para referirse a ellas. Ésto no es sorprendente si tenemos en cuenta que dicho artículo fue publicado en 1938, cuando la teoría de filtros todavía no se había extendido a toda la comunidad matemática.

En la primera sección vamos a definir el concepto de $\mathscr{A}$-filtro. A continuación extenderemos las principales nociones y resultados sobre filtros [12] a $\mathscr{A}$-filtros: base de $\mathscr{A}$-filtro, $\mathscr{A}$-ultrafiltro (y un concepto más débil llamado $\mathscr{A}$-filtro primo que en el caso de filtros es equivalente al de ultrafiltro), puntos adherentes y límite de $\mathscr{A}$-filtros en espacios topológicos, etc.

En la sección siguiente estudiaremos propiedades más específicas de los filtros, en concreto la imagen y preimagen de filtros a través de aplicaciones en espacios topológicos, caracterización de continuidad de aplicaciones en términos de filtros y producto de filtros (construcción y convergencia).

La última sección se dedica a relacionar la compacidad de espacios topológicos con las propiedades de los filtros. Primero probaremos una caracterización de los espacios compactos en términos de filtros así como algunas propiedades de los filtros sobre este tipo de espacios. Seguidamente introduciremos el concepto de filtro compactoide un tipo de filtro que se comporta como los filtros en espacios compactos pero que podemos en encontrar en espacios no necesariamente compactos. Estudiaremos en detalle algunas propiedades de estos filtros que nos servirán para probar los teoremas de Tychonoff y Wallace.

Las principales referencias para la elaboración de este capítulo son: [12], [42].

1.1. $\mathscr{A}$-Filtros y sus propiedades

Fijaremos un conjunto no vacío X y una subfamilia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X que sea cerrada para intersecciones finitas así como para uniones también finitas. Ejemplos significativos de este tipo de familias $\mathscr{A}$ son: la colección de todos los subconjuntos cerrados de una topología sobre X, un álgebra de subconjuntos de X y $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ la familia de todos los subconjuntos de X.

Definición 1.1.1. *Una subfamilia no vacia $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ diremos que es un $\mathscr{A}$-*filtro *si verifica las siguientes propiedades:*

(I) Si $A \subseteq B \in \mathscr{A}$ y $A \in \mathscr{F}$ entonces $B \in \mathscr{F}$.
(II) Si $A, B \in \mathscr{F}$ entonces $A \cap B \in \mathscr{F}$.
(III) $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

Cuando $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ diremos simplemente que $\mathscr{F}$ es un filtro *sobre X.*

De la definición se sigue que para cualesquiera $A, B \in \mathscr{F}$ se tiene $A \cap B \neq \emptyset$, que no existen $\mathscr{A}$-filtros sobre el conjunto vacío, y que si $X \in \mathscr{A}$ entonces el conjunto total X siempre pertenece a $\mathscr{F}$. La propiedad (II) es equivalente a decir que $\mathscr{F}$ es cerrado para intersecciones finitas por un sencillo argumento inductivo.

A continuación mostramos algunos ejemplos significativos de filtros.

Ejemplo 1.1.2. 1. *Sea X un conjunto y $A \subseteq X$ subconjunto no vacío. Entonces*

$$\mathscr{F}_A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$$

es un filtro sobre X que se denomina filtro principal generado por A .

2. *Si X es un conjunto infinito*

$$\mathscr{F} = \{F \subseteq X : X \setminus F \text{ es finito } \}$$

se llama filtro de los complementos finitos. *En particular, para $X = \mathbb{N}$, el filtro de los complementos finitos sobre $\mathbb{N}$ se denomina* filtro de Fréchet .

3. *Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red en un conjunto infinito X. Se define el* filtro asociado a la red *anterior como*

$$\mathscr{F} = \{F \subseteq X : \text{existe } \beta \in D \text{ tal que } \alpha \geq \beta \text{ implica } x_\alpha \in F\}.$$

Comprobemos que se trata de un filtro. Las propiedades (I) y (III) son obvias, veamos la segunda. Sean $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, y $\beta_1, \beta_2 \in D$ los correspondientes betas de la definición del filtro, entonces existe $\beta_3 \geq \beta_1, \beta_2$ por ser D un conjunto dirigido, de modo que si $\alpha \geq \beta_3$ entonces $x_\alpha \in F_1 \cap F_2$.

4. *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. El conjunto de los entornos de x*

$$\mathrm{Ent}(x) = \{\textit{entornos de } x\} = \{V \subseteq X : \textit{ existe } W \textit{ abierto tal que } x \in W \subseteq V\}$$

es un filtro que denominaremos filtro de entornos del punto *x. Las propiedades de los abiertos de una topología garantizan que se trata efectivamente de un filtro.*

Aunque sólo hemos puesto ejemplos de filtros usuales, es obvio que dado un filtro $\mathscr{F}$ sobre X se tiene que $\mathscr{F} \cap \mathscr{A}$ es un $\mathscr{A}$-filtro, con lo que los ejemplos anteriores se pueden usar para construir $\mathscr{A}$-filtros a partir de cualquier familia $\mathscr{A}$ con las propiedades citadas al inicio de la sección.

Proposición 1.1.3. *Sea $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathscr{A}$-filtros sobre un conjunto X. Si la intersección $\cap_{i\in I}\mathscr{F}_i$ es no vacía entonces es un $\mathscr{A}$-filtro.*

Demostración. Veamos que $\mathscr{F} = \cap_{i\in I}\mathscr{F}_i$ verifica las tres propiedades de la definición.

1. Si $A \in \mathscr{F}$ y $A \subseteq B \in \mathscr{A}$ entonces $B \in \mathscr{F}_i$ para cada $i \in I$, luego $B \in \mathscr{F}$.
2. Si $A, B \in \mathscr{F}$ entonces $A \cap B \in \mathscr{F}_i$ para todo $i \in I$, de modo que $A \cap B \in \mathscr{F}$.
3. $\emptyset \notin \mathscr{F}$ pues $\emptyset \notin \mathscr{F}_i$ para cualquier $i \in I$.

□

En general, la unión de $\mathscr{A}$-filtros no es $\mathscr{A}$-filtro. Por ejemplo, pensemos en un espacio topológico Hausdorff X y consideremos para dos puntos distintos x, y los filtros de entornos $\mathrm{Ent}(x), \mathrm{Ent}(y)$. La unión $\mathrm{Ent}(x) \cup \mathrm{Ent}(y)$ no verifica la propiedad (II), pues podemos encontrar entornos disjuntos de ambos puntos. No obstante, cuando la familia de $\mathscr{A}$-filtros es una cadena la respuesta es afirmativa, tal y como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.1.4. *Si $\mathscr{H}$ es una cadena no vacía de $\mathscr{A}$-filtros sobre X, entonces la unión $\bigcup_{\mathscr{F}\in\mathscr{H}}\mathscr{F}$ es un $\mathscr{A}$-filtro sobre X.*

Demostración. Como la cadena es no vacía, la unión es no vacía. Sea $A \in \bigcup_{\mathscr{F}\in\mathscr{H}}\mathscr{F}$ y $A \subseteq B \in \mathscr{A}$, entonces existe $\mathscr{F} \in \mathscr{H}$ tal que $A \in \mathscr{F}$, luego $B \in \mathscr{F} \subseteq \bigcup_{\mathscr{F}\in\mathscr{H}}\mathscr{F}$. Sean $A, B \in \bigcup_{\mathscr{F}\in\mathscr{H}}\mathscr{F}$, podemos encontrar $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ con $A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2$. Como $\mathscr{H}$ es una cadena podemos suponer que $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$ intercambiando los papeles en caso contrario. De este modo $A \cap B \in \mathscr{F}_2 \subseteq \bigcup_{\mathscr{F}\in\mathscr{H}}\mathscr{F}$. Por último, la unión no contiene el conjunto vacío, pues en caso contrario algún $\mathscr{A}$-filtro de $\mathscr{H}$ contendría al conjunto vacío como elemento, lo que contradice la definición. □

Introducimos ahora una noción que nos permitirá comparar $\mathscr{A}$-filtros de manera análoga al caso de topologías sobre un conjunto.

Definición 1.1.5. *Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{F}'$, $\mathscr{A}$-filtros sobre un conjunto X. Decimos que $\mathscr{F}'$ es más fino (o menos grueso) que $\mathscr{F}$ si se verifica $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$.*

1.1.1. Base de $\mathscr{A}$-filtro

Para determinar un $\mathscr{A}$-filtro o estudiar sus propiedades no hace falta trabajar con todos sus elementos, sino que podemos encontrar subfamilias que determinan de manera unívoca al mismo y que resultan más sencillas de describir o manejar.

Definición 1.1.6. *Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{A}$-filtro sobre X y $\beta \subseteq \mathscr{F}$. Se dice que β es una* base *de $\mathscr{F}$ si para cada $F \in \mathscr{F}$ existe $B \in \beta$ con $B \subseteq F$.*

El *carácter* de un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$, usualmente denotado por $\chi(\mathscr{F})$, es el menor cardinal para el que $\mathscr{F}$ admite una base con dicha cardinalidad. En particular, un $\mathscr{A}$-filtro se dice que es numerablemente generado si admite una base numerable, es decir, $\chi(\mathscr{F}) \leq \aleph_0$.

Ejemplo 1.1.7.

1. *Sea X es un espacio topológico. Si β_x es una base de entornos de $x \in X$ entonces es una base del filtro* $\mathrm{Ent}(x)$*. En particular, si X es un espacio* $1A\mathbb{N}$ *entonces* $\mathrm{Ent}(x)$ *tiene una base numerable para todo $x \in X$.*
2. *Sea $\mathscr{F}$ un filtro asociado a una red $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$. Entonces la colección de todos los conjuntos $(A_\beta)_{\beta\in D}$, donde $A_\beta = \{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}$ es una base de $\mathscr{F}$.*

Si β es base de un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$ entonces es inmediato comprobar que verifica las siguientes propiedades:

- (BF1) Si $A, B \in \beta$ entonces existe $C \in \beta$ tal que $C \subseteq A \cap B$.
- (BF2) La familia β es no vacía y $\emptyset \notin \beta$.

Recíprocamente, si $\beta \subseteq \mathscr{A}$ satisface (BF 1) y (BF 2) entonces

$$\langle\beta\rangle = \{F \in \mathscr{A} : B \subseteq F \text{ para algún } B \in \beta\}$$

es un $\mathscr{A}$-filtro sobre X con base β. De hecho $\langle\beta\rangle$ es el $\mathscr{A}$-filtro más grueso que contiene a β. En efecto, las propiedades (I) y (III) son claras. Para ver la segunda propiedad notemos que si F_1, F_2 pertenece a $\langle\beta\rangle$ y $B_1, B_2 \in \beta$ verifican $B_i \subseteq F_i$ $(i = 1,2)$. Por (BF1) existe $C \in \beta$ con $C \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$. Usando la definición 1.1.6 que β es una base de $\langle\beta\rangle$ por construcción. Si $\mathscr{F}$ es cualquier $\mathscr{A}$-filtro que contiene a β entonces también contiene a $\langle\beta\rangle$ usando (I).

Notar que si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{A}$-filtro y β satisface (BF 1) y (BF 2), entonces β es una base de $\mathscr{F}$ si y sólo si $\langle\beta\rangle = \mathscr{F}$.

Definición 1.1.8. *Diremos que $\beta \subseteq \mathscr{A}$ es una* base de $\mathscr{A}$-filtro *si verifica las condiciones (BF1) y (BF2).*

El siguiente resultado es claro.

Proposición 1.1.9. *Sean β_1, β_2 dos bases de $\mathscr{A}$-filtro sobre X. Entonces $\langle\beta_1\rangle \subseteq \langle\beta_2\rangle$ si y sólo si para cada $B_1 \in \beta_1$ existe $B_2 \in \beta_2$ con $B_2 \subseteq B_1$.*

No todas las subfamilias de $\mathscr{A}$ están contenidas en un $\mathscr{A}$-filtro, pero podemos caracterizar de manera sencilla a aquellas que sí lo están.

Proposición 1.1.10. *Sea $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{A}$. Existe un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$ sobre X con $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{F}$ si y sólo si la intersección finita de elementos de $\mathscr{O}$ es no vacía.*

Demostración. La condición necesaria es obvia por (II) de la definición de $\mathscr{A}$-filtro. Para el recíproco, llamemos $\mathscr{O}_1$ a la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{O}$. Entonces $\mathscr{O}_1$ es base de $\mathscr{A}$-filtro, el cual contiene necesariamente a la familia $\mathscr{O}$. □

El $\mathscr{A}$-filtro generado por la base $\mathscr{O}_1$ anterior es además el $\mathscr{A}$-filtro más grueso (más pequeño) que contiene al conjunto $\mathscr{O}$. Dicho $\mathscr{A}$-filtro se denomina *$\mathscr{A}$-filtro generado por $\mathscr{O}$* .

Corolario 1.1.11. *Supongamos que $\mathscr{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{A}$-filtro sobre X y $A \in \mathscr{A}$. Entonces $A \notin \mathscr{F}$ si y sólo si $\mathscr{F} \cup \{X \setminus A\}$ está contenido en un $\mathscr{A}$-filtro.*

Demostración. Supongamos que $A \notin \mathscr{F}$. Por la propiedad (I) deducimos que todo elemento F de $\mathscr{F}$ verifica $F \nsubseteq A$ lo que significa que $F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Usando la proposición 1.1.10 se sigue que $\mathscr{F} \cup \{X \setminus A\}$ está contenido en un $\mathscr{A}$-filtro. Recíprocamente, si $\mathscr{F}'$ es un $\mathscr{A}$-filtro que contiene a $\mathscr{F}$ y a $X \setminus A$ pero $A \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$ entonces $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathscr{F}'$ lo que contradice (III). □

1.1.2. $\mathscr{A}$-Filtros primos y $\mathscr{A}$-ultrafiltros

Un caso particular de $\mathscr{A}$-filtro, que tiene un enorme interés en este trabajo como veremos más adelante, es el concepto de $\mathscr{A}$-ultrafiltro que definimos a continuación.

Definición 1.1.12. *Un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$ sobre un conjunto X se dice es un* $\mathscr{A}$-ultrafiltro *si no existe un $\mathscr{A}$-filtro más fino que $\mathscr{F}$.*

Vamos a probar la existencia de $\mathscr{A}$-ultrafiltros. De hecho, el siguiente teorema demuestra una afirmación más fuerte.

Teorema 1.1.13 (Tarski)**.** *Todo $\mathscr{A}$-filtro está contenido en un $\mathscr{A}$-ultrafiltro.*

Demostración. Vamos a denotar por $\Phi(X, \mathscr{A})$ al conjunto de los $\mathscr{A}$-filtros con la relación de orden dada por la inclusión. Se trata claramente de un conjunto parcialmente ordenado. Fijado un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$ vamos a escribir

$$\mathscr{F}_{\geq} = \{\mathscr{G} \in \Phi(X, \mathscr{A}) : \mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}\}.$$

Con la relación de orden heredada de $\Phi(X, \mathscr{A})$ se trata de un conjunto parcialmente ordenado, no vacío e inductivo. En efecto, dada una cadena no vacía de elementos de $\mathscr{F}_{\geq}$ se tiene que la unión es un filtro (ver proposición 1.1.4) que obviamente contiene a $\mathscr{F}$. Estamos en condiciones de usar el Lema de Zorn para concluir que $\mathscr{F}_{\geq}$ contiene un elemento maximal $\mathscr{U}$. Dicho $\mathscr{A}$-filtro es un $\mathscr{A}$-ultrafiltro, ya que si $\mathscr{F}'$ es un $\mathscr{A}$-filtro con $\mathscr{F}' \supseteq \mathscr{U}$ entonces $\mathscr{F}' \supseteq \mathscr{F}$; de modo que $\mathscr{F}' \in \mathscr{F}_{\geq}$ y deducimos $\mathscr{U} = \mathscr{F}'$ por la maximalidad de $\mathscr{U}$ en $\mathscr{F}_{\geq}$. □

Damos una caracterización de los $\mathscr{A}$-ultrafiltros que nos será útil.

Proposición 1.1.14. *Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{A}$-filtro sobre X. Son equivalentes:*

(1) $\mathscr{F}$ *es* $\mathscr{A}$*-ultrafiltro.*
(2) Si $B \in \mathscr{A}$ *satisface* $B \cap A \neq \emptyset$ *para cada* $A \in \mathscr{F}$*, entonces* $B \in \mathscr{F}$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{A}$-ultrafiltro y $B \in \mathscr{A}$ verifica $B \cap A \neq \emptyset$ para cada $A \in \mathscr{F}$. La familia $\mathscr{O} = \mathscr{F} \cup \{B\}$ verifica las hipótesis de la proposición 1.1.10, de manera que existe un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}'$ que contiene a $\mathscr{F} \cup \{B\}$. Por maximalidad deducimos que $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$ y así $B \in \mathscr{F}$.

Recíprocamente, si $\mathscr{F}$ verifica la condición (2) y $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$, entonces dados elementos arbitrarios $B \in \mathscr{F}'$ y $A \in \mathscr{F}$ deben satisfacer que $B \cap A \neq \emptyset$, ya que ambos pertenecen al $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}'$. Usando la hipótesis (2) deducimos que $B \in \mathscr{F}$. □

Definición 1.1.15. *Un* $\mathscr{A}$*-filtro* $\mathscr{F}$ *se dice que es* primo *si para cualesquiera* $A, B \in \mathscr{A}$ *tenemos que* $A \cup B \in \mathscr{F}$ *implica* $A \in \mathscr{F}$ *o* $B \in \mathscr{F}$*.*

La definición anterior de $\mathscr{A}$-filtro primo es equivalente a decir que para cualesquiera $A_1, \ldots, A_n$ elementos de $\mathscr{A}$, si $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{F}$ entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_i \in \mathscr{F}$ por un sencillo argumento inductivo.

Proposición 1.1.16. *Todo* $\mathscr{A}$*-ultrafiltro* $\mathscr{U}$ *es primo.*

Demostración. Si $A, B \in \mathscr{A}$ son dos subconjuntos de X que no pertenecen a $\mathscr{U}$ pero tales que su unión $A \cup B \in \mathscr{U}$, entonces la proposición 1.1.14 nos permite encontrar $C, D \in \mathscr{F}$ con $C \cap A = \emptyset$ y $D \cap B = \emptyset$. Ahora bien, $C \cap D$ es un elemento que pertenece al $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$ y tiene intersección vacía con $A \cup B$, lo que es una contradicción. □

El recíproco de la proposición anterior no es cierto en general, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.17. *Consideramos* $[0,1]$ *con su topología inducida por* $\mathbb{R}$*, y consideremos* $\mathscr{A}$ *la familia de todos los cerrados de* $[0,1]$*. En primer lugar, el filtro de los complementos finitos* $\mathscr{F}_{cf}$ *sobre* $[0,1]$ *está contenido en un ultrafiltro* $\mathscr{U}$*. Como* $\mathscr{U}$ *es primo, es inmediato comprobar que* $\mathscr{V} = \mathscr{U} \cap \mathscr{A}$ *es un* $\mathscr{A}$*-filtro primo. Notemos además que existe* $x \in \bigcap_{A \in \mathscr{V}} A$ *(intersección de cerrados con la propiedad de la intersección finita en un compacto). Si* $\mathscr{V}$ *fuera* $\mathscr{A}$*-ultrafiltro entonces* $\{x\} \in \mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ *por la proposición 1.1.14, lo que no es posible pues* $\mathscr{U} \supseteq \mathscr{F}_{cf}$*.*

Si el conjunto $\mathscr{A}$ es un álgebra, es decir, contiene al conjunto total, es cerrada para uniones finitas y también para complementarios; entonces los $\mathscr{A}$-ultrafiltros y los $\mathscr{A}$-filtros primos coinciden.

Proposición 1.1.18. *Supongamos que* $\mathscr{A}$ *es un álgebra de conjuntos sobre* X *y sea* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{A}$*-filtro sobre* X*. Son equivalentes:*
(a) $\mathscr{F}$ *es* $\mathscr{A}$*-ultrafiltro.*
(b) $\mathscr{F}$ *es* $\mathscr{A}$*-filtro primo.*
(c) Si $A \in \mathscr{A}$ *entonces* $A \in \mathscr{F}$ *ó* $(X \setminus A) \in \mathscr{F}$*.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b): Ya ha sido probado en la proposición 1.1.16.

(b)$\Rightarrow$(c): Como $\mathscr{F}$ es no vacio y X contiene todo elemento de $\mathscr{F}$ es inmediato que $X \in \mathscr{F}$. Como $A \cup (X \setminus A) = X$ se deduce el resultado..

(c)$\Rightarrow$(a): Supongamos que $\mathscr{F}$ no es $\mathscr{A}$-ultrafiltro. Entonces existe filtro $\mathscr{G}$ tal que $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{G}$. Ésto significa que podemos encontrar $A \in \mathscr{G}$ tal que $A \notin \mathscr{F}$. Usando (c) tendríamos que $(X \setminus A) \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ con lo que $A, (X \setminus A) \in \mathscr{G}$ y $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathscr{G}$, lo que es absurdo. □

Si la intersección de una familia de $\mathscr{A}$-ultrafiltros es no vacía entonces es un $\mathscr{A}$-filtro por la proposición 1.1.3. Es interesante señalar que si $\mathscr{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X, entonces todo $\mathscr{A}$-filtro se puede construir de esta manera.

Proposición 1.1.19. *Supongamos que $\mathscr{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X. Todo $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$ es intersección de $\mathscr{A}$-ultrafiltros más finos que $\mathscr{F}$.*

Demostración. Sea $\theta = \{\mathscr{U} : \mathscr{U}$ es $\mathscr{A}$-ultrafiltro y $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}\}$. Se trata de una familia no vacía en virtud del teorema 1.1.13. Obviamente $\mathscr{F} \subseteq \cap_{\mathscr{U} \in \theta} \mathscr{U}$. Recíprocamente, supongamos que $A \in \mathscr{A}$ es un conjunto no vacío que no pertenece a $\mathscr{F}$. Entonces $\{X \setminus A\} \cup \mathscr{F}$ está contenido en un $\mathscr{A}$-filtro de acuerdo con el corolario 1.1.11. Dicho $\mathscr{A}$-filtro está contenido en un $\mathscr{A}$-ultrafiltro $\mathscr{U}'$ que necesariamente pertenece a θ por la definición esta familia. Deducimos que $A \notin \cap_{\mathscr{U} \in \theta} \mathscr{U}$ pues en caso contrario tendríamos que $A, (X \setminus A) \in \mathscr{U}'$ implica $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathscr{U}'$, lo que es absurdo. □

En general, no es posible dar una descripción explícita de los $\mathscr{A}$-ultrafiltros, salvo casos triviales. Si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$, para cada $x \in X$ la familia

$$\mathscr{F}_{\{x\}} = \{A \in \mathscr{P}(X) : x \in A\}$$

constituye un ultrafiltro sobre X de manera trivial. Este tipo de ultrafiltros recibe el nombre de *ultrafiltros no libres o principales*, y se pueden caracterizar por la propiedad $\bigcap_{A \in \mathscr{U}} A \neq \emptyset$. En efecto, es claro que esta condición es necesaria. Recíprocamente, sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro verificando $B = \bigcap_{A \in \mathscr{U}} A \neq \emptyset$ y $x \in B$, entonces $\{x\} \in \mathscr{U}$ ó $X \setminus \{x\} \in \mathscr{U}$. Pero esta última condición no es posible ya que x pertenece a todos los elementos de $\mathscr{U}$, luego $\{x\} \in \mathscr{U}$ y para cada $A \in \mathscr{U}$ es $A \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir, $x \in A$. Si $x \in B \subseteq X$ entonces $\{x\} \subseteq B$ y la definición de filtro nos dice que $B \in \mathscr{U}$. Diremos que un ultrafiltro es *libre* si $\bigcap_{A \in \mathscr{U}} A = \emptyset$.

Si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro que contiene un conjunto finito F entonces $\bigcap_{A \in \mathscr{U}} A$ se puede escribir como una intersección de dicho conjunto finito F y un número finito de elementos de $\mathscr{U}$. Dicha intersección será entonces no vacía por la propiedad (II) y deducimos que el ultrafiltro $\mathscr{U}$ es no libre. De este modo, un ultrafiltro $\mathscr{U}$ es libre si y sólo si no contiene subconjuntos finitos.

Corolario 1.1.20. *Si $A \subseteq X$ es infinito entonces existe un ultrafiltro libre $\mathscr{U}$ sobre X tal que $A \in \mathscr{U}$.*

Demostración. Como X debe ser infinito, podemos considerar $\mathscr{F}_{cf}$ el filtro de los complementos finitos en X (ver ejemplo 1.1.2). Se tiene que $A \cap F$ es no vacío para cada $F \in \mathscr{F}_{cf}$, de donde se deduce la existencia de un filtro más fino que $\mathscr{F}_{cf}$ que contiene a A (proposición 1.1.10), y por tanto, también un ultrafiltro con la misma propiedad. □

Observación 1.1.21. *A partir de la definición es inmediato que si $\mathscr{F}$ es un filtro sobre X entonces $\mathscr{F} \cap \mathscr{A}$ constituye un $\mathscr{A}$-filtro sobre X. Recíprocamente, un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{G}$ sobre X es una base de filtro en X, de manera que genera un filtro $\mathscr{F}$ que obviamente verifica $\mathscr{F} \cap \mathscr{A} = \mathscr{G}$.*

No obstante, esta relación resulta engañosa con ciertas propiedades. Por ejemplo, uno podría estar tentado a pensar que si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro sobre X entonces $\mathscr{U} \cap \mathscr{A}$ es un $\mathscr{A}$-ultrafiltro. Sin embargo esta afirmación es rotundamente falsa como pone de manifiesto el ejemplo 1.1.17.

1.1.3. Puntos adherentes y puntos límite

En lo que sigue supondremos que (X, τ) es un espacio topológico arbitrario. Vamos a definir conceptos de puntos límite y puntos adherentes de $\mathscr{A}$-filtros. La caracterización de propiedades topológicas en términos de convergencia de sucesiones resulta a menudo muy útil, pero tiene la limitación de que no puede ser manejada en todos los espacios topológicos (a menudo se requiere, por ejemplo, que el espacio sea primer axioma de numerabilidad, es decir, que cada punto tenga una base numerable de entornos). Esta limitación se solventa introduciendo la noción de red, que permite hacer caracterizaciones similares relativas a compacidad y otras propiedades topológicas en cualquier espacio topológico. También los $\mathscr{A}$-filtros permiten hacer caracterizaciones de este tipo en términos de sus puntos límite y de adherencia.

Definición 1.1.22. *Diremos que la base de $\mathscr{A}$-filtro β converge a un punto x o que x es* punto límite *de β si para cada entorno $V \in \mathrm{Ent}(x)$, existe $B \in \beta$ tal que $B \subseteq V$. Se denota $\beta \to x$.*

Notemos que la definición anterior engloba el caso en que la base de $\mathscr{A}$-filtro es un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$. Si β y β' son bases de $\mathscr{A}$-filtro de manera que $\langle\beta\rangle \subseteq \langle\beta'\rangle$, entonces todo punto límite de β es punto límite de β' como consecuencia de la definición anterior y la proposición 1.1.9. En particular, dos bases del mismo $\mathscr{A}$-filtro tienen los mismos puntos límite, y una base de $\mathscr{A}$-filtro y el $\mathscr{A}$-filtro que genera tienen también los mismos puntos límite.

Proposición 1.1.23. *Supongamos que $\mathscr{A}$ contiene una base de entornos de un punto $x \in X$ y $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{A}$-filtro. Entonces $x \in X$ es punto límite de $\mathscr{F}$ si y sólo si $\mathrm{Ent}(x) \cap \mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$.*

Demostración. Si x es punto límite de $\mathscr{F}$ y $V \in \mathrm{Ent}(x) \cap \mathscr{A}$ entonces V es entorno de x, de modo que existe $A \in \mathscr{F}$ con $x \in A \subseteq V$ por definición. Como $V \in \mathscr{A}$ deducimos que $V \in \mathscr{F}$ por la propiedad (I) de la definición de $\mathscr{A}$-filtro. Recíprocamente, si V es un entorno de x entonces, como $\mathscr{A}$ contiene una base de entornos de x existe $A \in \mathscr{A} \cap \mathrm{Ent}(x) \subseteq \mathscr{F}$ con $A \subseteq V$. □

Como consecuencia de la proposición anterior, en el caso de los filtros usuales ($\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$) decir que una base de filtro β converge hacia x es equivalente a decir que el filtro $\mathrm{Ent}(x)$ de entornos de x está contenido en $\langle\beta\rangle$, i.e., $\langle\beta\rangle$ es más fino que $\mathrm{Ent}(x)$.

Cuando $\mathscr{F}$ es un filtro a sociado a una red, en particular a una sucesión, la convergencia del filtro es equivalente a la convergencia de la red, tal y como pone de manifiesto la siguiente proposición.

Proposición 1.1.24. *Sea $\mathscr{F}$ un filtro asociado a una red $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$. Entonces $\mathscr{F}$ converge a x si y sólo si la red $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ converge a x.*

Demostración. Una base de $\mathscr{F}$ es la familia de todos los conjuntos de la forma $\{x_\alpha : \alpha \succcurlyeq \gamma\}$ con γ variando en el conjunto dirigido D (ver ejemplo 1.1.7). De este modo, decir que $\mathscr{F}$ converge a un cierto $x \in X$ es equivalente a afirmar que para cada $V \in \mathrm{Ent}(x)$ existe un $\gamma \in D$ tal que $\{x_\alpha : \alpha \succcurlyeq \gamma\} \subseteq V$. Pero ésto es precisamente la convergencia de la red $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$. □

Podemos caracterizar los espacios que son Hausdorff según la convergencia de $\mathscr{A}$-filtros.

Proposición 1.1.25. *Si X es Hausdorff entonces cada $\mathscr{A}$-filtro tiene a lo sumo un punto límite. Si $\mathscr{A}$ contiene una base de entornos de cada punto $x \in X$ y todo $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$ tiene a lo sumo un punto límite, entonces X es Hausdorff.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{A}$-filtro sobre X convergente a dos puntos distintos $p, q \in X$. Como X es Hausdorff existen entornos disjuntos V_p y V_q de p y q respectivamente. Por definición existirán $A_p, A_q \in \mathscr{F}$ con $A_p \subseteq V_p$ y $A_q \subseteq V_q$ lo que implica $A_p \cap A_q = \emptyset$ contradiciendo la definición de $\mathscr{A}$-filtro.

Veamos la segunda parte. Supongamos por reducción al absurdo que el espacio X no es Hausdorff, lo que significa que existen dos puntos $p, q \in X$ de modo que cualesquiera entornos $V \in \mathrm{Ent}(p)$ y $W \in \mathrm{Ent}(q)$ tienen intersección no vacía $V \cap W \neq \emptyset$. Definimos

$$\beta = \{V \cap W : V \in \mathrm{Ent}(p) \cap \mathscr{A}, W \in \mathrm{Ent}(q) \cap \mathscr{A}\}.$$

Se trata de una base de $\mathscr{A}$-filtro pues $V \cap W$ nunca es vacío como ya hemos comentado, y además $(V_1 \cap W_1) \cap (V_2 \cap W_2) = (V_1 \cap V_2) \cap (W_1 \cap W_2) \in \beta$ si $V_i \in \mathrm{Ent}(p) \cap \mathscr{A}, W_i \in \mathrm{Ent}(q) \cap \mathscr{A}$ $(i = 1, 2)$. Aplicando la proposición 1.1.23 concluimos que el $\mathscr{A}$-filtro generado por dicha base converge hacia p y q, ya que $\mathscr{A} \cap \mathrm{Ent}(p), \mathscr{A} \cap \mathrm{Ent}(q) \subseteq \beta$ por construcción. □

Ejemplo 1.1.26. *(a) Para cualquier $x \in X$ se tiene que el filtro de entornos* $\mathrm{Ent}(x)$ *converge hacia x. De hecho es el filtro más grueso que converge hacia x, de acuerdo con la proposición 1.1.23.*

(b) Sea $X = \mathbb{R}$, consideremos la sucesión $x_n = 1/n$ y el filtro $\mathscr{F}$ asociada a ella.

1. *Si $\tau = \tau_u$ es la topología usual de $\mathbb{R}$ entonces el filtro $\mathscr{F}$ converge a* 0*, siendo el límite único pues X es Hausdorff.*
2. *Si $\tau = \tau_{fin}$ es la topología de los complementos finitos entonces $\mathscr{F}$ converge a todo punto de $\mathbb{R}$. En efecto, dado cualquier conjunto finito M existe n_0 tal que $x_n \notin M$ si $n \geq n_0$.*
3. *Si $\tau = \tau_{dis}$ es la topología discreta entonces $\mathscr{F}$ no tiene puntos límite.*

Definición 1.1.27. *Sea β es una base de $\mathscr{A}$-filtro y $x \in X$. Diremos que x es un* punto adherente *de β si $x \in \overline{B}$ para todo $B \in \beta$. El conjunto de puntos adherentes de una base de $\mathscr{A}$-filtro β lo denotaremos por $C(\beta)$, es decir,*

$$C(\beta) = \bigcap_{B \in \beta} \overline{B}.$$

La definición anterior engloba el caso en que β es un $\mathscr{A}$-filtro. Si β y β' son bases de $\mathscr{A}$-filtro tales que $\langle \beta \rangle \subseteq \langle \beta' \rangle$ entonces $C(\beta') \subseteq C(\beta)$, ya que si $x \in C(\beta')$ entonces dado $B \in \beta$ existe $B' \in \beta'$ con $B' \subseteq B$ por la proposición 1.1.9, de manera que $x \in \overline{B'} \subseteq \overline{B}$. En particular, dos bases del mismo $\mathscr{A}$-filtro tienen los mismos puntos de adherencia, y una base de $\mathscr{A}$-filtro β y el $\mathscr{A}$-filtro $\langle\beta\rangle$ que genera tienen también los mismos puntos de adherencia. De este modo

$$C(\mathscr{F}) = \bigcap_{F\in\mathscr{F}} \overline{F} = \bigcap_{B\in\beta} \overline{B} = C(\beta)$$

si β es base del $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}$.

Si consideramos el filtro $\mathscr{F}$ asociado a una red $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$, usando la base de $\mathscr{F}$ que describimos en el ejemplo 1.1.7 tendremos que el conjunto de puntos adherentes de $\mathscr{F}$ es

$$C(\mathscr{F}) = \bigcap_{\beta\in D} \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}}.$$

Por tanto, los puntos de adherencia de un filtro asociado a una red son los puntos de aglomeración de la red.

Hay una clara relación entre puntos adherentes y puntos límite de un filtro.

Proposición 1.1.28. *Si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{A}$-filtro entonces todo punto límite de $\mathscr{F}$ es punto adherente.*

Si $x \in X$ es punto adherente de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{A}$ contiene una base de entornos de x entonces existe un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}' \supseteq \mathscr{F}$ que converge hacia x.

Demostración. Si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{A}$-filtro y $x \in X$ es un punto límite de $\mathscr{F}$ entonces fijado un entorno V de x existe $B \in \mathscr{F}$ tal que $B \subseteq V$. Para cualquier $A \in \mathscr{F}$ sabemos que $A \cap B \neq \emptyset$, de modo que $A \cap V \neq \emptyset$. Como V era un entorno arbitrario de x concluimos que $x \in \overline{A}$ para cada $A \in \mathscr{A}$, es decir x es punto adherente de $\mathscr{F}$.

Sea $x \in C(\mathscr{F})$ y supongamos que $\mathscr{A}$ contiene una base de entornos de x. Por definición $x \in \overline{A}$ para cada $A \in \mathscr{F}$, es decir, $W \cap A \neq \emptyset$ para cada $W \in \mathrm{Ent}(x)$ y cada $A \in \mathscr{F}$.

Podemos aplicar la proposición 1.1.10 con la familia $\mathscr{F} \cup (\mathrm{Ent}(x) \cap \mathscr{A})$ y tendremos que existe un $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}'$ con $\mathscr{F}' \supseteq (\mathscr{F} \cup (\mathrm{Ent}(x) \cap \mathscr{A})) \supseteq \mathscr{F}$. De acuerdo con la proposición 1.1.23 $\mathscr{F}'$ converge a x ya que $\mathrm{Ent}(x) \cap \mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}'$. □

Ejemplo 1.1.29. *Sean $X = \mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n + 1/n$ y $\mathscr{F}$ el filtro asociado a la sucesión anterior.*

- *Si $\tau = \tau_u$ es la topología usual, entonces los puntos adherentes de $\mathscr{F}$ son $-1, 1$. No hay más puntos de adhrencia pues $|x_{2n} - 1|, |x_{2n+1} + 1| \leq 1/n$ para cada n. Si $y \neq 1, -1$ entonces tomando $\delta < |y-1|, |y+1|$ se tiene que existe n_0 con $\{x_n : n \geq n_0\} \subseteq \overline{B(y,\delta)}^c$.*
- *Si $\tau = \tau_{fin}$ entonces todo punto es punto límite, luego también es punto adherente.*
- *Si $\tau = \tau_{dis}$ entonces $\mathscr{F}$ no tiene puntos adherentes.*

En el caso de $\mathscr{A}$-ultrafiltros podemos precisar más sobre la relación entre puntos límites y adherentes.

Corolario 1.1.30. *Supongamos que $\mathscr{A}$ contiene una base de entornos de cada punto $x \in X$ y sea $\mathscr{U}$ un $\mathscr{A}$-ultrafiltro sobre X. El conjunto de puntos límites de $\mathscr{U}$ coincide con el conjunto de sus puntos adherentes.*

Demostración. Ya sabemos que todo punto límite es un punto adherente por la proposición 1.1.28. Por ese mismo resultado tenemos que si x es un punto adherente entonces existe $\mathscr{F}'$ filtro más fino que $\mathscr{U}$ tal que $\mathscr{F}'$ converge hacia x. No obstante la maximalidad de $\mathscr{U}$ implica que $\mathscr{U} = \mathscr{F}'$, con lo que x es punto límite de $\mathscr{U}$. □

1.2. Filtros

Durante esta sección vamos a tratar siempre con filtros, es decir, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$. Para una aplicación $f : X \to Y$ denotamos for $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$, $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Proposición 1.2.1. *Si $f : X \to Y$ una función y β una base de un filtro $\mathscr{F}$ sobre X, entonces*

$$f[\beta] := \{f[B] : B \in \beta\}$$

es una base para el filtro

$$\mathscr{G} = \{C \subseteq Y : f^{-1}[C] \in \mathscr{F}\}.$$

Demostración. Notemos que $\mathscr{G}$ es un filtro: obviamente no contiene al conjunto vacío pues $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, es cerrada para intersecciones (la aplicación imagen inversa conserva intersecciones), y dados $C \subseteq D \subseteq Y$ con $f^{-1}[C] \in \mathscr{F}$ se tiene que $f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D]$, luego $f^{-1}[D] \in \mathscr{F}$.

Veamos a hora que $f[\beta]$ es una base de $\mathscr{G}$. Claramente $f[\beta] \subseteq \mathscr{G}$ ya que si $B \in \beta$ entonces $B \subseteq f^{-1}[f[B]]$ y $B \in \mathscr{F}$ implica que $f^{-1}[f[B]] \in \mathscr{F}$, luego $f[B] \in \mathscr{G}$ por definición. Supongamos que $C \in \mathscr{G}$, entonces $f^{-1}[C] \in \mathscr{F}$ y existe $B \in \beta$ con $B \subseteq f^{-1}[C]$, luego $f[B] \subseteq C$. □

Se puede caracterizar la continuidad de una función f es estos términos.

Proposición 1.2.2. *Una función $f : X \to Y$ es continua en un punto $\alpha \in X$ si y sólo si para cada base de filtro β convergente hacia α se tiene que la base de filtro $f[\beta]$ converge hacia $f(\alpha)$.*

Demostración. Supongamos que f es continua en α y β es una base de filtro convergente hacia α. Dado un entorno abierto V de $f(\alpha)$ tendremos que existe un entorno abierto U de α con $f[U] \subseteq V$. Por hipótesis existe $B \in \beta$ con $B \subseteq U$, luego $f[B] \subseteq V$.

Para ver el recíproco, supongamos que f no es continua en α. Entonces existe un entorno V de $f(\alpha)$ tal que cada entorno U de α verifica $f[U] \setminus V \neq \emptyset$. Como consecuencia, el filtro de entornos de α es un filtro en X que converge hacia α aunque su imagen a través de f no converge hacia $f(\alpha)$. □

Si β es una base de filtro sobre X de manera que el filtro que genera $\langle\beta\rangle$ es un ultrafiltro diremos que β es una *base de ultrafiltro*.

Proposición 1.2.3. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación y β base de ultrafiltro en X, entonces $f[\beta]$ es base de ultrafiltro en Y.*

Demostración. Sabemos que $f[\beta]$ es base de filtro por la proposición 1.2.1 y que genera el filtro $\mathscr{G}$ definido en el enunciado de dicha proposición. Basta pues comprobar que $\mathscr{G}$ es un ultrafiltro. Dado $C \subseteq Y$ uno de los conjuntos $f^{-1}[C]$ y $f^{-1}[Y \setminus C] = X \setminus f^{-1}[C]$ debe pertenecer al ultrafiltro $\mathscr{U}$ generado por β, lo que implica que C o $Y \setminus C$ pertenece a $\mathscr{G}$. □

Si queremos construir de forma natural un filtro en el dominio a partir de un filtro en el codominio hemos de pedir condiciones adicionales.

Proposición 1.2.4. *Sea $f : X \to Y$ función y β base de filtro sobre Y tal que para cada $B \in \beta$ se verifica $B \cap f[X] \neq \emptyset$, entonces*

$$f^{-1}[\beta] := \{f^{-1}[B] : B \in \beta\}$$

es una base de filtro sobre X. En particular, si f es suprayectiva entonces $f^{-1}[\beta]$ siempre es base de filtro para cualquier β.

Demostración. De la condición $B \cap f[X] \neq \emptyset$ se deduce que $f^{-1}[B] \neq \emptyset$ para todo $B \in \beta$, es decir, $\emptyset \notin f^{-1}[\beta]$. Por otro lado, $C \subseteq A \cap B$ implica $f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$, de manera que $f^{-1}[\beta]$ es base de filtro por serlo β. □

1.2.1. Producto de filtros

Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y para cada $i \in I$ sea β_i una base de filtro sobre X_i. Definimos

$$\mathscr{B} = \{\prod_{i\in I} M_i : \text{existe } J \subseteq I \text{ finito tal que } M_i = X_i \text{ si } i \in I \setminus J \text{ y } M_i \in \beta_i \text{ si } i \in J\}.$$

Vamos a comprobar que $\mathscr{B}$ es una base de filtro.

- $\mathscr{B} \neq \emptyset$ ya que contiene a $\prod_{i\in I} X_i$.
- La intersección de elementos de $\mathscr{B}$ se comporta bien con el producto en el sentido de que

$$\left(\prod_{i\in I} M_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} N_i\right) = \prod_{i\in I} (M_i \cap N_i).$$

  Sabemos que $M_i \cap N_i = X_i$ salvo un conjunto finito J. Tomando $C_i \in \beta_i$ con $C_i \subseteq (M_i \cap N_i)$ para cada $i \in J$, y $C_i = X_i$ si $i \in I \setminus J$, se tiene que $\prod_{i\in I} C_i$ es un elemento de M y además

$$\prod_{i\in I} C_i \subseteq \left(\prod_{i\in I} M_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} N_i\right).$$

La base de filtro $\mathscr{B}$ la denotaremos como $\prod_{i\in I} \beta_i$. Observemos también que si $p_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k$ es la proyección canónica para cada $k \in I$, entonces la familia $\mathscr{B}$ está formada por las intersecciones finitas de elementos de

$$\{p_k^{-1}[M_k] : M_k \in \beta_k, k \in I\}. \tag{1.1}$$

Lema 1.2.5. *Supongamos que para cada $i \in I$ tenemos dos bases β_i, β_i' sobre X_i con $\langle \beta_i' \rangle \subseteq \langle \beta_i \rangle$. Denotemos por $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ las bases de filtro producto correspondientes a $(\beta_i)_{i\in I}$ y $(\beta_i')_{i\in I}$ respectivamente. Entonces $\langle \mathscr{B}' \rangle \subseteq \langle \mathscr{B} \rangle$.*

Demostración. Sea $\prod_{i\in I} M_i' \in \mathscr{B}'$ y J un subconjunto finito de I tal que $M_i' = X_i$ para cada $i \in I \setminus J$ y $M_i' \in \beta_i'$ para cada $i \in J$. Fijado $i \in J$ existe $M_i \in \beta_i$ tal que $M_i \subseteq M_i'$ por la proposición 1.1.9. Definiendo $M_i = X_i$ para todo $i \in I \setminus J$ tendremos que $\prod_{i\in I} M_i \in \mathscr{B}$ está contenido en $\prod_{i\in I} M_i'$. La misma proposición 1.1.9 garantiza el resultado. □

Definición 1.2.6. *Sea $\mathscr{F}_i$ un filtro sobre X_i para cada $i \in I$. Llamamos* producto de los filtros $\mathscr{F}_i$ *y lo denotamos por $\prod_{i\in I} \mathscr{F}_i$ al filtro sobre $X = \prod_{i\in I} X_i$ generado por la base $\mathscr{B}$ anterior tomando como β_i una base cualquiera de $\mathscr{F}_i$.*

El lema 1.2.5 garantiza que la definición es correcta pues no depende de la base que elijamos para cada filtro $\mathscr{F}_i$ de la familia.

Proposición 1.2.7. *Sea X un conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $f_i : X \to Y_i$ $i \in I$ familia de aplicaciones. Dotamos a X de la topología menos fina que hace las aplicaciones f_i continuas.*

En las condiciones anteriores, una base de filtro β sobre X converge hacia $a \in X$ si y sólo si la base de filtro $f_i[\beta]$ converge hacia $f_i(a) \in Y_i$ para cada $i \in I$.

Demostración. Comencemos observando que dicha topología τ sobre X es la generada por la subbase formada por la unión de todos los conjuntos

$$\tau_i' = \{f_i^{-1}[V] : V \subseteq Y_i \text{ abierto }\}$$

para todo $i \in I$. En otras palabras una base de la topología es la dada por los conjuntos de la forma $\cap_{i\in J} f_i^{-1}[U_i]$ donde U_i es abierto en X_i y $J \subseteq I$ es finito.

Para ver la equivalencia del enunciado, como cada función f_i es continua por la construcción de la topología τ podemos aplicar la proposición 1.2.2 para deducir que si β converge hacia a entonces $f_i[\beta]$ converge hacia $f_i(a)$. Recíprocamente, sea $V \in \mathrm{Ent}(a)$. Por definición de subbase de una topología existe entonces un conjunto finito $J \subseteq I$ y abiertos $(U_i)_{i\in J}$ de modo que

$$a \in \bigcap_{i\in J} f_i^{-1}[U_i] \subseteq V.$$

Como $f_i[\beta]$ converge a $f_i(a)$ para todo $i \in J$ por hipótesis, existe $B_i \in \beta$ con $f_i[B_i] \subseteq U_i$, o también, $B_i \subseteq f_i^{-1}[U_i]$ para cada $i \in J$. Así pues $f_i^{-1}[U_i] \in \langle \beta \rangle$ para cada $i \in J$, y usando (II) se tiene $\cap_{i\in J} f_i^{-1}[U_i] \in \langle \beta \rangle$. De este modo $V \in \langle \beta \rangle$, y como $V \in \mathrm{Ent}(a)$ era arbitrario concluimos que $\mathrm{Ent}(a) \subseteq \langle \beta \rangle$, es decir, $\langle \beta \rangle$ (y por tanto β) converge hacia a. □

Corolario 1.2.8. *Para que una base de filtro β de $X = \prod_{i\in I} X_i$ sea convergente (en la topología producto) a $x \in X$ es necesario y suficiente que para cada $i \in I$ la base de filtro $\pi_i[\beta]$ converja a $\pi_i(x)$.*

Demostración. En la proposición 1.2.7 basta tomar las aplicaciones f_i como las proyecciones π_i sobre cada X_i. La topología más gruesa que hace todas estas proyecciones continuas es la topología producto, con lo que se deduce el resultado. □

1.2.2. Compacidad y filtros compactoides

Continuando con la notación de la sección anterior, X será un espacio topológico arbitrario. Sabemos que la definición de compacidad se puede dar en términos de cubrimientos con abiertos o con familias de cerrados que tienen la propiedad de la intersección finita. Usaremos la equivalencia que más nos convenga de aquí en adelante.

Teorema 1.2.9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es compacto.
(b) Todo filtro sobre X posee, al menos, un punto de adherencia.
(c) Todo ultrafiltro sobre X es convergente.

Demostración. (a)⇒(b): Sea $\mathscr{F}$ un filtro. La propiedad (II) de la definición de filtro permite deducir que cualquier subfamilia finita de $\{\overline{A} : A \in \mathscr{F}\}$ tiene intersección no vacía. Usando (a) podemos afirmar que

$$\bigcap_{A\in\mathscr{F}} \overline{A} \neq \emptyset.$$

Por tanto, el conjunto de puntos de adherencia es no vacío.

(b)⇒(c): Todo ultrafiltro tiene un punto de adherencia. Por el corolario 1.1.30 deducimos que también es un punto límite.

(c)⇒(a) Sea $\mathscr{C}$ una familia de conjuntos cerrados tal que toda subfamilia suya tiene intersección no vacía. Entonces $\mathscr{C}$ está contenida en un filtro $\mathscr{F}$ por la proposición 1.1.10. Como $\mathscr{F}$ posee un punto de adherencia concluimos que

$$\emptyset \neq C(\mathscr{F}) = \bigcap_{A\in\mathscr{F}} \overline{A} \subseteq \bigcap_{C\in\mathscr{C}} C.$$

□

Proposición 1.2.10. *Sea X es un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un filtro sobre X. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Si X es compacto y $V \subseteq X$ es entorno de todos los puntos de adherencia de $\mathscr{F}$ entonces $V \in \mathscr{F}$.*
2. *Si X es Hausdorff y $\mathscr{F}$ converge hacia p entonces $C(\mathscr{F}) = \{p\}$.*
3. *Si X es compacto y $\mathscr{F}$ tiene un único punto de adherencia p entonces $\mathscr{F}$ converge hacia p.*

Demostración.
1. Notemos que $C(\mathscr{F}) \neq \emptyset$ por el teorema anterior. Podemos suponer que V es un entorno abierto de $C(\mathscr{F})$. Supongamos por reducción al absurdo que $V \notin \mathscr{F}$. Por el corolario 1.1.11 existe un filtro $\mathscr{F}'$ más fino que $\mathscr{F}$ y con $(X \setminus V) \in \mathscr{F}'$. Ahora bien, si X es compacto entonces $\mathscr{F}'$ posee un punto de adherencia p. Por un lado, dicho punto debe pertenecer a $\overline{X \setminus V} = X \setminus V$, y por otro, p es también punto de adherencia de $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$. Ésto último implica que $p \in V$, lo que es contradictorio.
2. Sabemos que $p \in C(\mathscr{F})$, y si q es otro punto de adherencia entonces existe un filtro $\mathscr{F}'$ más fino que $\mathscr{F}$ que converge hacia q. Pero dicho filtro también debe converger a p, luego $p = q$ por la unicidad del límite.

3. Usando el primer apartado se tiene que todo entorno de p pertenece a $\mathscr{F}$, de lo que se deduce el resultado.

$\square$

Las propiedades de los filtros en un compacto se pueden estudiar de manera más general cuando nos restringimos a una cierta subfamilia de filtros conocidos como filtros compactoides. Se trata de una noción que aparece por primera vez en el artículo *Compactness in spaces of measures* (1970) de Topsoe, y también años más tarde en *Characterization of some classes of pseudotopological linear spaces* de M. P. Kac. Los filtros compactoides se pueden ver también como una generalización del concepto de filtro convergente. Estos filtros son usados a menudo en situaciones en las que la convergencia o la compacidad son hipótesis más fuertes de las que manejamos, revelándose como instrumentos útiles con aplicaciones en la generación de aplicaciones multivaluadas superiormente semicontinuas (USCOs), optimización, diferenciación generalizada, ecuaciones diferenciales, etc. Algunas de estas aplicaciones pueden encontarse en [19], [27].

Definición 1.2.11. *Se dice que una base de filtro β sobre un espacio topológico X es* compactoide *si todo ultrafiltro que contiene a β es convergente.*

Notar que si β y β' son dos bases del mismo filtro entonces una es compactoide si y solo si la otra lo es. En particular, un filtro es compactoide si y sólo si tiene base de filtro compactoide.

Como consecuencia del teorema 1.2.9 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.12. *X es compacto si y sólo si todo filtro sobre X es compactoide,*

Todo filtro convergente $\mathscr{F}$ es un filtro compactoide, ya que todo punto límite de $\mathscr{F}$ es punto límite de los filtros más finos que $\mathscr{F}$, y en particular, de los ultrafiltros más finos. Introducimos una serie de conceptos que serán de gran utilidad para comprender mejor las propiedades de los filtros compactoides.

Definición 1.2.13. *Sean $\mathscr{F}$,$\mathscr{G}$ filtros y β base de filtro sobre X.*

(i) *$\mathscr{F}$ se dice que* subconverge *a $L \subseteq X$, y lo denotamos por $\mathscr{F} \rightsquigarrow L$, si dado cualquier abierto V de X con $L \subseteq V$ se tene que existe $B \in \mathscr{F}$ con $B \subseteq V$.*

(ii) *Diremos que $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son* disjuntos *si existen $G \in \mathscr{G}$ y $F \in \mathscr{F}$ con $F \cap G = \emptyset$. En otro caso diremos que $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ no son disjuntos.*

(iii) *Una red $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in D}$ se dice que* está eventualmente en β, *y se denota por $(x_i)_{i \in D} \prec \beta$, si para cada $F \in \beta$ existe $i_0 \in D$ tal que si $i \geq i_0$ entonces $x_i \in F$. En otras palabras, si β está contenido en el filtro asociado a la red $\boldsymbol{x}$.*

Notemos que decir que $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ no son disjuntos es equivalente a decir que existe un filtro más fino que ambos.

Lema 1.2.14. *Si $\mathscr{F}$ es un filtro sobre X entonces existe una red $\boldsymbol{x}$ que está eventualmente en $\mathscr{F}$. En particular, todo ultrafiltro es un filtro asociado a una red.*

Demostración. Para cada $A \in \mathscr{F}$ vamos a fijar $x_A \in A$ (los elementos de un filtro son conjuntos no vacíos). El filtro $\mathscr{F}$ se puede ver como un conjunto dirigido con el orden

$$A \leq B \text{ si y sólo si } A \supseteq B.$$

Se trata de una relación reflexiva y transitiva, y dados $A, B \in \mathscr{F}$ la intersección $A \cap B \in \mathscr{F}$ es un elemento mayor que A y B en dicho orden. Por tanto, $\{x_A : A \in \mathscr{F}\}$ es una red. Si denotamos por $\mathscr{G}$ al filtro asociado a la red entonces $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$. En efecto, fijado $A \in \mathscr{F}$ tenemos que si $A \leq B$ entonces $B \subseteq A$, luego $\{x_B : B \geq A\} \subseteq A$. Como los conjuntos de la forma $\{x_B : B \geq A\}$ son una base de $\mathscr{G}$, deducimos que $A \in \mathscr{G}$.

La última afirmación es una consecuencia de la maximalidad de los ultrafiltros. □

Proposición 1.2.15. *Sea X espacio topológico Hausdorff y β una base de filtro en X. Entonces β converge a $p \in X$ si y sólo si $C(\beta) = \{p\}$ y $\beta \rightsquigarrow C(\beta)$.*

Demostración. Si β converge hacia p entonces $C(\beta) = \{p\}$ por la proposición 1.2.10. Además todo entorno de $C(\beta)$ es un entorno de p, con lo que se verifica $\beta \rightsquigarrow C(\beta)$. El recíproco es inmediato pues todo entorno de p es un entorno de $C(\beta) = \{p\}$. □

Proposición 1.2.16. *Si X es regular y $\mathscr{F} \rightsquigarrow L$ cerrado, entonces los puntos de adherencia de $\mathscr{F}$ están en L. También es cierto si X es Hausdorff y L es compacto.*

Demostración. Sea p un punto de adherencia de $\mathscr{F}$ tal que $p \notin L$. Como X es regular, existe V entorno de p y U entorno de L con $V \cap U = \emptyset$ (si X es Hausdorff y L es compacto entonces también podemos encontrar entornos como los anteriores). Por la subconvergencia existe $F \in \mathscr{F}$ con $F \subseteq U$. Como $p \in \overline{F}$, deducimos que $V \cap U \supseteq V \cap F \neq \emptyset$, lo que es absurdo. □

Observar que si $\mathscr{F}$ es filtro compactoide entonces todo ultrafiltro $\mathscr{U}$ más fino que $\mathscr{F}$ tiene puntos adherentes (sus puntos límite), que también serán puntos adherentes de $\mathscr{F}$.

Teorema 1.2.17. *Sea X un espacio topológico Hausdorff y β base de filtro sobre X. Entonces son equivalentes:*

(i) Existe un conjunto compacto no vacío L de X con $\beta \rightsquigarrow L$ en X.
(ii) El conjunto $C(\beta)$ de los puntos adherentes de β es compacto no vacío y $\beta \rightsquigarrow C(\beta)$ en X.

Demostración. (ii) $\Rightarrow$ (i): Basta tomar $L = C(\beta)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $C(\beta) \subseteq L$ por la proposición 1.2.16, de modo que $C(\beta)$ es compacto al ser un subconjunto cerrado de un compacto. Supongamos, por reducción al absurdo, que $C(\beta) = \emptyset$. Para cada $x \in L$ existe V_x entorno de x y $F_x \in \mathscr{F}$ tales que $V_x \cap F_x = \emptyset$. Como L es compacto y $\{V_x\}_{x \in L}$ es un cubrimiento abierto de L, sabemos que existe un subcubrimiento finito

$$L \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots \cup V_{x_n}.$$

Puesto que $\mathscr{F}$ subconverge a L, existe $A \in \mathscr{F}$ con $A \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots \cup V_{x_n} = V$. Pero entonces $B = F_{x_1} \cap \ldots \cap F_{x_n} \in \mathscr{F}$ verifica que $A \cap B \subseteq V \cap B = \emptyset$, lo cual es absurdo.

Por último hay que probar $\beta \rightsquigarrow C(\beta)$. En caso contrario existiría un abierto $U \supseteq C(\beta)$ tal que $B \nsubseteq U$ para cada $B \in \beta$, es decir, $(X \setminus U) \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \beta$. Entonces la familia

$$\beta' = \{B \cap (X \setminus U) : B \in \beta\}$$

es una base de filtro. Como $B \cap (X \setminus U) \subseteq B$ para cada $B \in \beta$ y β subconverge a L, entonces β' también subconverge a L. Igual que antes se prueba que $C(\beta') \neq \emptyset$. Como consecuencia,

$$\emptyset = C(\beta) \cap (X \setminus U) = \bigcap\{\overline{B} \cap (X \setminus U) : B \in \beta\} \supseteq \bigcap\{\overline{B \cap (X \setminus U)} : B \in \beta\} = C(\beta') \neq \emptyset.$$

□

Vamos a ver una serie de afirmaciones que son equivalentes al hecho de que un filtro dado sea compactoide.

Teorema 1.2.18. *Sean X espacio topológico y β base de filtro sobre X. Son equivalentes:*

(iii) *Para cada cubrimiento abierto $\{O_s\}_{s\in S}$ de X, existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq S$ y $B \in \beta$ con $B \subseteq \bigcup_{s\in S_0} S$.*

(iv) *Si $\mathscr{G}$ es un filtro sin puntos de adherencia, i.e. $C(\mathscr{G}) = \emptyset$, entonces $\mathscr{G}$ es disjunto con β.*

(v) *Toda red $(x_i)_{i\in D} \prec \beta$ tiene un punto de aglomeración en X.*

(vi) *β es compactoide en X.*

Además, si X es Hausdorff las condiciones equivalentes (i)-(ii) del teorema 1.2.17 implican las condiciones (iii)-(vi).

Demostración. (iii) $\Rightarrow$ (iv): Sea $\mathscr{G}$ un filtro con $C(\mathscr{G}) = \bigcap_{G\in\mathscr{G}} \overline{G} = \emptyset$. Tomando complementarios se satisface

$$\bigcup_{G\in\mathscr{G}} (X \setminus \overline{G}) = X,$$

luego por hipótesis existe $B \in \beta$ y un recubrimiento finito de B

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (X \setminus \overline{G_j}).$$

Pero entonces tendríamos

$$B \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} G_j\right) \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{n} (X \setminus \overline{G_j})\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} G_j\right) = \emptyset,$$

con lo que $\mathscr{G}$ y β son disjuntos.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in D} \prec \beta$ entonces el filtro $\mathscr{G}$ asociado a la red es no disjunto con β (ya que $\beta \subseteq \mathscr{G}$) , de donde $C(\mathscr{G}) \neq \emptyset$. Como los puntos de aglomeración del filtro $\mathscr{G}$ y de la red $\mathbf{x}$ coinciden, concluimos lo que buscábamos.

(v) $\Rightarrow$ (vi): Sea $\mathscr{U}$ ultrafiltro con $\mathscr{U} \supseteq \beta$. Sabemos que $\mathscr{U}$ es el filtro asociado a una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in D}$ por el lema 1.2.14. Ahora bien, como $\beta \subseteq \mathscr{U}$ entonces $\mathbf{x} \prec \beta$ por definición de filtro asociado a una red. Por hipótesis $\mathbf{x}$ tiene un punto de aglomeración que será punto de adherencia de $\mathscr{U}$, así que $\mathscr{U}$ convergerá hacia ese punto por el corolario 1.1.30.

(vi) $\Rightarrow$ (iii): Razonamos por reducción al absurdo: Supongamos que existe $\{O_s\}_{s\in S}$ cubrimiento abierto de X tal que para cada $S_0 \subseteq S$ finito y cada $B \in \beta$ se verifica

$$B \cap \left(\bigcap_{s\in S_0} (X \setminus O_s) \right) \neq \emptyset.$$

Entonces existe ultrafiltro $\mathscr{U}$ que contiene a $\beta \cup \{(X \setminus O_s) : s \in S\}$. Como β es compactoide tendremos que $\mathscr{U}$ tiene límite $p \in X$. En particular, p es un punto de adherencia de $\mathscr{U}$ de modo que

$$p \in \bigcap_{s\in S} (X \setminus O_s) \Rightarrow p \notin \bigcup_{s\in S} O_s = X,$$

lo que es absurdo.

Por último observemos que la condición (i) del teorema 1.2.17 implica (iii), sin más que considerar $S_0 \subseteq S$ finito tal que $L \subseteq \bigcup_{s\in S_0} O_s$. $\square$

Proposición 1.2.19. *Si X es un espacio regular, entonces (i),(ii) del teorema 1.2.17 y (iii)-(vi) del teorema 1.2.18 son equivalentes.*

Demostración. En el teorema 1.2.18 se prueba que las condiciones (i), (ii) siempre implican las condiciones (iii)-(vi). Recíprocamente, $C(\beta)$ es cerrado por definición y no vacío por (iv), ya que β no es disjunto consigo mismo. Veamos que $C(\beta)$ es compacto: Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre $C(\beta)$, entonces

$$\beta' = \{U \subseteq X : U \text{ abierto con } A \subseteq U \text{ para algún } A \in \mathscr{F}\}$$

es una base de filtro sobre X. Notar que las bases de filtro β y β' verifican que si $U \in \beta'$ y $B \in \beta$ entonces $U \cap B \neq \emptyset$. En efecto, como existe $A \in \mathscr{F}$ con $A \subseteq U$ y dicho A verifica que $A \subseteq \overline{B}$ entonces $U \cap \overline{B} \neq \emptyset$, de donde $U \cap B \neq \emptyset$. Consideramos el conjunto dirigido $(\beta' \times \beta, \leq)$ para el orden

$$(U,B) \geq (U',B') \Leftrightarrow (U \subseteq U') \wedge (B \subseteq B').$$

Usando el axioma de elección, tomamos un elemento $x_{(U,B)} \in U \cap B$ para cada $U \in \beta'$ y $B \in \beta$. De este modo, $\mathbf{x} = \{x_{(U,B)} : (U,B) \in \beta' \times \beta\}$ es una red que verifica $\mathbf{x} \prec \beta$. En efecto, para cada $B_0 \in \beta$ tenemos que si $(U,B) \geq (X,B_0)$ entonces $x_{(U,B)} \in B_0$. Análogamente, $\mathbf{x} \prec \beta'$. Como $\mathbf{x}$ tiene un punto de aglomeración por (v), concluimos que existe $y \in C(\beta) \cap C(\beta')$.

Usando que X es espacio regular, para cada $A \in \mathscr{F}$ se verifica

$$\overline{A} = \bigcap \{\overline{U} : U \text{ abierto con } U \supseteq A\}.$$

De este modo, como $y \in C(\beta')$ entonces $y \in \overline{A}$ para cada $A \in \mathscr{F}$. En otras palabras, todo filtro $\mathscr{F}$ sobre $C(\beta)$ tiene un punto de adherencia en $C(\beta)$. El teorema 1.2.9 muestra que $C(\beta)$ es compacto.

Por último tenemos que comprobar que β subconverge a $C(\beta)$ en X. Sea V abierto con $V \supseteq C(\beta)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $(X \setminus V) \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \beta$. Entonces $\beta \cup \{X \setminus V\}$ está contenido en un filtro, que a su vez está contenido en un ultrafiltro $\mathscr{U}$. Como β es compactoide, $\mathscr{U}$ tiene un punto adherente $p \in X \setminus V$ (su punto límite), que obviamente verificará $p \in C(\beta)$, lo cual es absurdo ya que $C(\beta) \subseteq V$.

□

Como observación a la proposición anterior señalar que la hipótesis X regular sólo se ha usado para comprobar que $C(\beta)$ era compacto, con lo que también hemos probado el siguiente resultado.

Corolario 1.2.20. *Sea β una base de filtro compactoide en un espacio topológico Hausdorff X, entonces $C(\beta) \neq \emptyset$ y $\beta \rightsquigarrow C(\beta)$.*

En la siguiente proposición se dan condiciones para que la imagen de un filtro compactoide a través de una aplicación sea filtro compactoide.

Proposición 1.2.21. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua sobreyectiva entre dos espacios topológicos. Si β es base de filtro compactoide en X entonces $f[\beta]$ es base de filtro compactoide en Y.*

Demostración. Sabemos que $f[\beta]$ es una base de filtro por la proposición 1.2.1. Veamos que es compactoide: Sea $\{O_s\}_{s\in S}$ un cubrimiento abierto de Y. Entonces $\{f^{-1}[O_s]\}_{s\in S}$ es un cubrimiento abierto de X, y el teorema 1.2.18 garantiza que existe $B \in \beta$ tal que $B \subseteq \bigcup_{s\in S_0} f^{-1}[O_s]$. Ésto implica que $f[B] \in f[\beta]$ satisface $f[B] \subseteq \bigcup_{s\in S_0} O_s$. Por el mismo teorema concluimos que $f[\beta]$ es compactoide. □

Vamos a aplicar los resultados anteriores para estudiar el producto de filtros compactoides, lo que resultará útil para demostrar los teoremas de Wallace y Tychonoff.

Proposición 1.2.22. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos Hausdorff. Para cada $i \in I$, sea β_i una base de filtro de X_i que subconverge a un subconjunto compacto no vacío $L_i \subseteq X_i$. Entonces la base de filtro producto $\prod_{i\in I} \beta_i$ es compactoide y subconverge a $\prod_{i\in I} L_i$.*

Demostración. Fijemos un ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre $\prod_{i\in I} X_i$ que sea más fino que $\beta = \prod_{i\in I} \beta_i$. Entonces para cada $i \in I$ se tiene que $\pi_i[\mathscr{U}]$ es base de un ultrafiltro en X_i más fino que β_i por la proposición 1.2.3. Como β_i es compactoide (ver teorema 1.2.18), la base de ultrafiltro $\pi_i[\mathscr{U}]$ debe converger a un elemento $u_i \in L_i$ para cada $i \in I$. Por el corolario 1.2.8 sabemos que ésto equivale a que $\mathscr{U}$ converge a $\prod_{i\in I} u_i \in \prod_{i\in I} L_i$. Así pues, $\prod_{i\in I} \beta_i$ es compactoide, y además $C(\prod_{i\in I} \beta_i) \subseteq \prod_{i\in I} L_i$ ya que los puntos límite de los ultrafiltros más finos que β pertenecen a $\prod_{i\in I} L_i$. Usando el corolario 1.2.20 concluimos que $\prod_{i\in I} \beta_i$ subconverge a $\prod_{i\in I} L_i$. □

Corolario 1.2.23 (Teorema de Wallace). *Sean $(X_i)_{i\in I}$ familia de espacio topológicos Hausdorff y $L_i \subseteq X_i$ subconjunto compacto (no vacío) para cada $i \in I$. Entonces para cada abierto W en $\prod_{i\in I} X_i$ con $\prod_{i\in I} L_i \subseteq W$ existe un abierto básico de la topología producto $\prod_{i\in I} U_i$ ($U_i = X_i$ para cada $i \in I$ salvo una cantidad finita de índices) de modo que*

$$\prod_{i\in I} L_i \subseteq \prod_{i\in I} U_i \subseteq W.$$

Demostración. Para cada $i \in I$, sea $Ab(L_i)$ la familia de todos los abiertos que contienen a L_i. Entonces $Ab(L_i)$ es una base de filtro que obviamente subconverge a L_i. Por la proposición 1.2.22 deducimos que

$$\prod_{i \in I} Ab(L_i) \rightsquigarrow \prod_{i \in I} L_i,$$

en $\prod_{i \in I} X_i$, lo que nos da el resultado buscado. □

Corolario 1.2.24 (Teorema de Tychonoff)**.** *Sean $(X_i)_{i \in I}$ familia de espacio topológicos Hausdorff compactos. Entonces el producto $\prod_{i \in I} X_i$ es compacto.*

Demostración. Para cada $i \in I$, consideramos $\beta_i = \{X_i\}$, que es base de filtro que subconverge a $X_i = C(\beta_i)$ compacto. Por tanto, β_i es compactoide para todo $i \in I$ por el teorema 1.2.18, de modo que $\prod_{i \in I} \beta_i$ es filtro compactoide por la proposición 1.2.22, y una base de dicho filtro producto viene dada por $\{\prod_{i \in I} X_i\}$. La definición de filtro compactoide implica en este caso que todo ultrafiltro en $\prod_{i \in I} X_i$ es convergente, y por el teorema 1.2.9 deducimos que $\prod_{i \in I} X_i$ es compacto. □

Capítulo 2

Compactificaciones

EL primer ejemplo de compactificación de un espacio se debe a Riemann (1826-1866), quien en 1858-1859 construye la conocida como *Esfera de Riemann*. Dicha construcción es lo que actualmente llamaríamos *compactificación por un punto* del plano complejo $\mathbb{C}$. En cierto sentido, la idea de compactificar un espacio topológico X añadiendo un sólo punto (el "punto del infinito") correspondería a la manera más sencilla (o minimal) de construir un espacio compacto que contenga de manera natural a X. Aunque la idea parece sencilla, esta construcción resulta ser una herramienta importante en matemáticas.

El estudio de Von Neumann de anillos de funciones continuas y acotadas para la formulación axiomática de la física cuántica motivó la noción de una compactificación maximal para un espacio topológico. En mecánica cuántica, cada función del mencionado anillo representa la energía potencial de una partícula en el espacio de fase X (espacio topológico en el que se representen todos los posibles estados), pues se supone que la energía potencial debe estar acotada. Es entonces de interés encontrar un espacio Y que contenga a X y en el que toda función continua sea acotada. Este problema está ligado con el siguiente: si Y es una compactificación de X, ¿bajo qué condiciones podemos extender una función continua con valores reales definida sobre X a una función continua sobre Y?. En 1937, Marshall H. Stone y Edmund Čech de manera independiente encontraron respuestas similares a esta cuestión usando C^*-álgebras, dando lugar a lo que ahora se conoce como compactificación de Stone-Čech (nombre introducido por Walker en 1974). En los años 40 y 50, otros matemáticos como H. Wallman y P. Samuel estudiaron la construcción de compactificaciones similares sin recurrir a C^*- álgebras, sino usando filtros. En la actualidad, el estudio de la compactificación de Stone-Čech $\beta\mathbb{N}$ de los números naturales es objeto de estudio desde el punto de vista topológico-conjuntista por las numerosas patologías que esconde.

En la primera sección definimos el concepto de compactificación de un espacio topológico y estudiamos algunas condiciones necesarias para su existencia. Seguidamente hacemos la construcción detallada de la compactificación tipo Wallman $\mathscr{A}(X)$ de un espacio topológico semi-normal X (teorema 2.2.4) siguiendo el esquema del artículo de Frink [36]. Añadimos algunas observaciones y propiedades adicionales que creemos ayudan a entender mejor la estructura del espacio que se construye. También caracterizamos (proposición 2.2.6) aquellas funciones continuas definidas sobre X con valores en un compacto Hausdorff K que se pueden extender a una función continua definida en todo $\mathscr{A}(X)$, proposición en la que recogen dos resultados de [36] y [31] respectivamente, aunque con una prueba ligeramente modificada que nos será de utilidad más adelante.

En la sección siguiente estudiamos las propiedades de los conjuntos cero en espacios completamente regulares, así como de los z-filtros y z-ultrafiltros como casos particulares de los $\mathscr{A}$-filtros del primer capítulo cuando tomamos como $\mathscr{A}$ la familia de todos los conjuntos cero. Construimos entonces la compactificación de Stone-Čech de estos espacios (teorema 2.3.12) como caso particular de la compactificación tipo Wallman. También presentamos diferentes caracterizaciones (teorema 2.3.10) tomadas de [39] de este tipo de compactificaciones.

Finalmente analizamos con más detalle la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto: topología, extensión de funciones y relación con la convergencia de ultrafiltros, cardinalidad del espacio. Hacemos también un resumen con propiedades de $\beta\mathbb{N}$.

Las principales referencias para la elaboración de este capítulo han sido: [36], [31], [39], [58], [69], [76].

2.1. Compactificación de un espacio topológico

Comenzamos recordando que una aplicación $f: X \to Z$ entre dos espacios topológicos se dice que es un *embebimiento* si es una aplicación continua e inyectiva $f: X \to Z$ que al restringir su rango a la imagen $f: X \to f[X]$ resulta ser un homeomorfismo (con la topología relativa).

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio topológico. Una* compactificación *de X es un par (f,Z) donde Z es un espacio compacto y $f: X \to Z$ es un embebimiento tal que $f[X]$ es denso en Z.*

Para un espacio topológico X, podemos considerar la familia $\mathrm{Com}(X)$ de todas las compactificaciones de X que son Hausdorff. Como ésta es una propiedad hereditaria, una condición necesaria para que $\mathrm{Com}(X)$ sea no vacío es que el espacio X de partida sea Hausdorff, hipótesis que asumiremos a partir de ahora.

Diremos que dos compactificaciones (f,Y) y (g,Z) de X son *topológicamente equivalentes*, y lo escribimos $(f,Y) \sim (g,Z)$, si existe $h: Y \to Z$ homeomorfismo tal que $h \circ f = g$. Se trata obviamente de una relación de equivalencia con lo que podemos construir el espacio cociente: $\overline{\mathrm{Com}(X)} := \mathrm{Com}(X)/\sim$. En este nuevo conjunto definimos la relación de orden

$$(f,Y) \geq (g,Z) \Leftrightarrow \exists h: Y \to Z \text{ continua tal que } h \circ f = g.$$

Observemos que está bien definida. Sean $(f_1,Y_1) \sim (f_2,Y_2)$ y $(g_1,Z_1) \sim (g_2,Z_2)$, y $\varphi: Y_1 \to Y_2, \varphi': Z_1 \to Z_2$ los homeomorfismos que verifican $\varphi \circ f_1 = f_2$ y $\varphi' \circ g_1 = g_2$. Si $h_1: Y_1 \to Z_1$ es aplicación continua con $h_1 \circ f_1 = g_1$, entonces $h_2 = \varphi' \circ h_1 \circ \varphi^{-1}$ es continua y satisface

$$h_2 \circ f_2 = h_2 \circ \varphi \circ f_1 = \varphi' \circ h_1 \circ f_1 = \varphi' \circ g_1 = g_2.$$

Intercambiando los papeles de h_1,h_2 y usando los inversos de φ, φ' se prueba el recíproco.

El par $(\overline{\mathrm{Com}(X)}, \geq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Las propiedades reflexiva y transitiva son obvias. Respecto a la propiedad antisimétrica, si $(f,Y) \geq (g,Z)$ y $(g,Z) \geq (f,Y)$ entonces existen aplicaciones continuas $h : Y \to Z, h' : Z \to Y$ tales que $h \circ f = g$, $h' \circ g = f$. Por tanto, $(h \circ h') \circ g = g$ y se deduce que $h \circ h'$ coincide con la identidad sobre $g[X]$. Como este conjunto es denso en Z Hausdorff, concluimos que $h \circ h' = Id_Z$ de acuerdo con la siguiente proposición de unicidad de la extensión.

Proposición 2.1.2. *Sean X un espacio topológico arbitrario, $A \subseteq X$ y $f : A \to Z$ aplicación continua donde Z es Hausdorff. Entonces existe a lo sumo una extensión de f a una función continua $g : \overline{A} \to Z$.*

Demostración. Sean $g, g' : \overline{A} \to Z$ dos extensiones de f. Supongamos que son distintas, es decir, que existe $x \in \overline{A}$ con $g(x) \neq g'(x)$. Como Z es Hausdorff, existen U, U' entornos disjuntos de $g(x)$ y $g'(x)$ respectivamente. Por continuidad podemos encontrar un entorno V de x con $g[V] \subseteq U$ y $g'[V] \subseteq U'$. Pero $V \cap A \neq \emptyset$ ya que $x \in \overline{A}$, de modo que tomando $y \in V \cap A$ tenemos $g(y) = f(y) = g'(y) \in g[V] \cap g'[V] = \emptyset$, lo cual es absurdo. □

2.1.1. Condición necesaria para existencia de compactificación

La primera cuestión va ser qué espacios admiten una compactificación Hausdorff. La clave va a venir dada por la siguiente clase de espacios.

Definición 2.1.3. *Un espacio topológico X se dice que es* completamente regular *si los conjuntos unipuntuales son cerrados (i.e. es T_1) y para todo punto $x \in X$ y subconjunto cerrado A que no contenga a x, existe una aplicación continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[A] = \{0\}$ y $f(x) = 1$.*

Si T es un espacio compacto Haussdorff entonces se demuestra fácilmente que T es normal, i.e., T es T_1 y si C_1 y C_2 son dos subconjuntos cerrados de T entonces existen abiertos disjuntos V_1 y V_2 tales que $C_i \subseteq V_i$ $(i = 1,2)$. No es tan sencillo probar que todo espacio normal es completamente regular, lo que se deduce del denominado *lema de Urysohn*.

Teorema 2.1.4 (Lema de Urysohn)**.** *Sea T un espacio normal y sean A, B subconjuntos cerrados disjuntos de T. Si $[a,b]$ es un intervalo cerrado de la recta real entonces existe una aplicación continua $f : X \to [a,b]$ tal que $f(x) = a$ para todo $x \in A$ y $f(x) = b$ para cada $x \in B$. En particular, todo espacio normal es completamente regular.*

Demostración. Para la primera parte ver [58]. Para la última afirmación basta usar que si F es subconjunto cerrado de T y $x_0 \notin F$ entonces F y $\{x_0\}$ son cerrados disjuntos y podemos aplicar la primera parte con el intervalo $[0,1]$. □

La propiedad de ser completamente regular es hereditaria. En efecto, supongamos que T es completamente regular, X es un subconjunto de T, $A \subseteq X$ es subconjunto cerrado de X y $x_0 \in X$ es un punto que no pertenece a A. Como $\overline{A}^T \cap X = \overline{A}^X = A$, deducimos que $x_0 \notin \overline{A}^T$; luego existe una aplicación continua $g : T \to [0,1]$ con $g(x_0) = 1$ y $g(x) = 0$ para cada $x \in \overline{A}^T$. La restricción de g a X, $f = g|_X : X \to [0,1]$ sigue siendo continua y verifica $f(x_0) = 1$ y $f(x) = 0$ para cada $x \in A$. Por otro lado es claro que si los conjuntos unipuntuales son cerrados en T entonces también lo serán en X. Como consecuencia deducimos lo siguiente.

Proposición 2.1.5. *Si X es un espacio topológico que admite una compactificación Hausdorff entonces X es completamente regular.*

2.2. Compactificaciones tipo Wallman

Henry Wallman publicó en 1938 su artículo *Lattices and Topological Spaces* [77] un procedimiento para construir una compactificación de un espacio normal usando el conjunto de todos los cerrados del espacio de partida, compactificación que a menudo se encuentra en la literatura como *compactificación (o extensión) de Wallman* (ver [31, p. 177]). Años más tarde, Frink [36] basándose en las ideas de Wallman describe un método más general que usa lo que él denomina *bases normales*. Como él mismo señalaría en su artículo, esta construcción generaliza la idea de la compactificación de Wallman así como el proceso de construcción de la compactificación de Stone-Čech descrito por Jerison y Gillman [39]. Njastad [61] dió una caracterización de todas las compactificaciones que eran de tipo Wallman mostrando además ejemplos de compactificaciones que satisfacen las condiciones de su teorema, entre las que se encontraban la de Alexandroff (también conocida como *compactificación por un punto*) o la de Stone-Čech, entre otras. Alo y Shapiro [5], [4] estudiaron y profundizaron en estos conceptos, lo que les permitió obtener otro tipo de espacios que en particular incluían a la real-compactificación de Hewitt.

Comenzamos recordando el concepto de base de cerrados de una topología que será necesario para definir las bases normales de Frink.

Definición 2.2.1. *Una colección $\mathscr{C}$ de subconjuntos cerrados de X se dice que es una* base para los conjuntos cerrados de *X si para cada F cerrado y $x \in X \setminus F$ existe $C \in \mathscr{C}$ tal que $C \supseteq F$ y $x \notin C$. En otras palabras, todo conjunto F cerrado X es intersección de elementos de $\mathscr{C}$.*

Definición 2.2.2. *Diremos que una base de cerrados $\mathscr{A}$ de X es una* base normal *si verifica las siguientes condiciones:*

1. *$\mathscr{A}$ es cerrado para intersecciones y uniones ambas finitas.*
2. *$\mathscr{A}$ es disjuntiva, i. e., si $x \in X \setminus C$ para un conjunto C cerrado en X entonces existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $x \in A \subseteq X \setminus C$.*
3. *Si $A, B \in \mathscr{A}$ son disjuntos entonces existen $A', B' \in \mathscr{A}$ tales que $A \subseteq X \setminus A'$, $B \subseteq X \setminus B'$ y $A' \cup B' = X$, o equivalentemente, $(X \setminus A') \cap (X \setminus B') = \emptyset$.*

Señalar que no todos los espacios topológicos poseen una base normal. Más adelante daremos una caracterización de los espacios T_1 que admiten base normal.

Definición 2.2.3. *Un espacio topológico X se dice que es es* semi-normal *si es T_1 y admite una base normal.*

Vamos a ver que este tipo de espacios admiten una compactificación *tipo Wallman*. La construcción de la compactificación de Wallman es similar a la construcción de los números reales $\mathbb{R}$ como la completación del espacio de los números racionales $\mathbb{Q}$. Ahora el papel de (las clases de equivalencia de) las sucesiones de Cauchy lo desempeñan los $\mathscr{A}$-ultrafiltros sobre X. Algunos de ellos tienen límite en X, concretamente para cada $x \in X$

$$\mathscr{F}_{\{x\}} = \{A \in \mathscr{A} : x \in A\}$$

es un $\mathscr{A}$-ultrafiltro que converge hacia x. Obviamente se trata de $\mathscr{A}$-filtros, y son maximales pues si $B \notin \mathscr{F}_{\{x\}}$ entonces $x \notin B$, y usando que $\mathscr{A}$ es una familia disjuntiva deducimos que existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $x \in A$ y $A \cap B = \emptyset$, es decir, $A \in \mathscr{F}_{\{x\}}$ y $A \cap B = \emptyset$. El hecho de que sea convergente hacia x se debe a que si V es entorno abierto de x entonces $x \notin X \setminus V$ cerrado, y usando de nuevo que $\mathscr{A}$ es disjuntiva encontramos $A \in \mathscr{A}$ con $x \in A$ y $A \cap (X \setminus V) = \emptyset$, es decir, $A \in \mathscr{F}_{\{}x\}$ con $A \subseteq V$. Notemos que el límite es único pues X es T_1, lo que implica que si $y \neq x$ entonces $x \notin \{y\}$ cerrado y existe $A \in \mathscr{A}$ con $x \in A$ e $y \notin A$, por ser $\mathscr{A}$ disjuntiva.

Al igual que se define $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$, vamos a considerar el conjunto $\mathscr{A}(X)$ formado por todos los $\mathscr{A}$-ultrafiltros sobre X al cual dotaremos de una topología con la cual será un espacio Hausdorff y compacto. Además el espacio X se puede embeber en $\mathscr{A}(X)$ identificando cada elemento x con el $\mathscr{A}$-filtro $\mathscr{F}_{\{x\}}$, resultando X un subconjunto denso de $\mathscr{A}(X)$ tal que todo $\mathscr{A}$-ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre $X \subseteq \mathscr{A}(X)$ es convergente hacia un elemento de $\mathscr{A}(X)$, que será el propio $\mathscr{U}$ pero visto como elemento de $\mathscr{A}(X)$.

Teorema 2.2.4 (Frink,1964). *Sea (X,τ) un espacio topológico semi-normal y $\mathscr{A}$ una familia normal en X. Entonces*

$$\mathscr{A}(X) = \{\mathscr{U} :\ \mathscr{U} \text{ es } \mathscr{A}\text{-ultrafiltro sobre } X\}$$

admite estructura de espacio topológico compacto Hausdorff y un embebimiento $j : X \to \mathscr{A}(X)$ de modo que $(j, \mathscr{A}(X))$ es una compactificación de X.

Identificando $X \subseteq \mathscr{A}(X)$, todo $\mathscr{A}$-ultrafiltro sobre X es convergente hacia un elemento de $\mathscr{A}(X)$ y todo elemento de $\mathscr{A}(X)$ es límite de un único $\mathscr{A}$-ultrafiltro sobre X.

Demostración. Vamos a comprobar que la familia $\mathscr{C} = \{C_A : A \in \mathscr{A}\}$ donde $C_A = \{\mathscr{U} \in \mathscr{A}(X) : A \in \mathscr{U}\}$ es una base de cerrados para una topología sobre $\mathscr{A}(X)$, o equivalentemente que la familia $\{V_A : A \in \mathscr{A}\}$ donde

$$V_A = \mathscr{A}(X) \setminus C_A = \{\mathscr{U} \in \mathscr{A}(X) : A \notin \mathscr{U}\} = \{\mathscr{U} \in \mathscr{A}(X) : \exists B \in \mathscr{U} \text{ tal que } B \subseteq X \setminus A\}$$

es una base de abiertos para una topología sobre $\mathscr{A}(X)$.

1. Dado $\mathscr{U} \in \mathscr{A}(X)$ siempre podemos encontrar $A \in \mathscr{A}$ con $A \notin \mathscr{U}$. Basta probar que $\mathscr{A}$ contiene dos elementos disjuntos, pues en ese caso no pueden pertenecer ambos al mismo $\mathscr{A}$-filtro. Tomemos dos puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ (Podemos suponer que X tiene al menos dos elementos pues si X es unipuntual entonces el teorema es trivial). Como $x_1 \notin \{x_2\}$ cerrado (X es T_1) existe $A_2 \in \mathscr{A}$ con $x_2 \in A_2$ y $x_1 \notin A_2$ por ser $\mathscr{A}$ base de cerrados. Usando ahora que $\mathscr{A}$ es disjuntiva podemos encontrar $A_1 \in \mathscr{A}$ con $x \in A_1$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
2. Si $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ entonces $V_{A_1} \cap V_{A_2} = V_{A_1 \cup A_2}$. En efecto, basta probar que si $\mathscr{U}$ es un $\mathscr{A}$-ultrafiltro entonces $A_1 \cup A_2 \notin \mathscr{U}$ si y sólo si $A_1, A_2 \notin \mathscr{U}$. Pero ésto es equivalente a decir que $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{U}$ si y sólo si $A_1 \in \mathscr{U}$ o $A_2 \in \mathscr{U}$, lo cual es cierto ya que todo $\mathscr{A}$-ultrafiltro es primo.

Señalar que para los cerrados básicos también se tienen propiedades útiles como $C_{A\cup B} = C_A \cup C_B$, que se sigue igual que antes porque los $\mathscr{A}$-ultrafiltros son primos, y $C_{A\cap B} = C_A \cap C_B$ por las propiedades de los $\mathscr{A}$-filtros.

Vamos a verificar las propiedades del enunciado.

- $\mathscr{A}(X)$ es un espacio compacto: Tenemos que comprobar que toda familia de cerrados $\mathscr{C}$ en $\mathscr{A}(X)$ con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Podemos limitarnos al caso de una familia de cerrados básicos puesto que todo cerrado es intersección de cerrados básicos. Pero si $\{C_{A_i} : i \in I\}$ es una tal familia entonces la colección $\{A_i : i \in I\}$ también tiene la propiedad de la intersección finita puesto que

$$C_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_n}} = C_{A_{i_1}} \cap \ldots \cap C_{A_{i_n}} \neq \emptyset$$

implica que existe un $\mathscr{A}$-ultrafiltro $\mathscr{U}$ que contiene a $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}$ como elemento.
- $\mathscr{A}(X)$ es un espacio Hausdorff: Supongamos que $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ son ultrafiltros distintos, entonces existen $A \in \mathscr{U}, B \in \mathscr{V}$ con $A \cap B = \emptyset$. Usando que la familia $\mathscr{A}$ es normal, deducimos que existen A' y B' en $\mathscr{A}$ tales que $A \subseteq X \setminus A'$, $B \subseteq X \setminus B'$ y $A' \cup B' = X$. Así pues, $\mathscr{U} \in V_{A'}$, $\mathscr{V} \in V_{B'}$ siendo

$$V_{A'} \cap V_{B'} = \mathscr{A}(X) \setminus (C_{A'} \cup C_{B'}) = \mathscr{A}(X) \setminus (C_{B'\cup A'}) = \emptyset.$$

- Definimos la aplicación $j : X \to \mathscr{A}(X)$ dada por $j(x) = \mathscr{F}_{\{x\}} = \{A \in \mathscr{A} : x \in A\}$, que son $\mathscr{A}$-ultrafiltros como hemos comentado antes de enunciar el teorema. Veamos que se trata de un embebimiento. Dicha aplicación es inyectiva, pues dados dos elementos distintos $x, y \in X$, como $\{y\}$ es cerrado y $\mathscr{A}$ es disjuntiva existe $A \in \mathscr{A}$ con $x \in A \subseteq X \setminus \{y\}$. Al ser A es cerrado, de nuevo la misma propiedad nos dice que existe $B \in \mathscr{A}$ con $y \in B \subseteq X \setminus A$. Pero entonces $A \in \mathscr{F}_{\{x\}}$ y $B \in \mathscr{F}_{\{y\}}$ son elementos disjuntos, luego se trata de ultrafiltros distintos.
  Además j es continua. Como los C_A constituyen una base de cerrados de $\mathscr{A}(X)$, es decir, todo cerrado de $\mathscr{A}(X)$ se puede escribir como intersección de cerrados C_A; y la operación imagen inversa j^{-1} es compatible con la intersección, basta ver que $j^{-1}[C_A]$ es cerrado para cada A. Ahora bien,

$$j^{-1}[C_A] = \{x \in X : \mathscr{F}_{\{x\}} \in C_A\} = \{x \in X : A \in \mathscr{F}_{\{x\}}\} = \{x \in X : x \in A\} = A$$

  que es un conjunto cerrado por hipótesis.
  Análogamente se puede probar que j es una aplicación cerrada en la imagen. Para un cerrado básico $A \in \mathscr{A}$ se tiene

$$j[A] = \{\mathscr{F}_{\{x\}} : x \in A\} = \{\mathscr{F}_{\{x\}} : A \in \mathscr{F}_{\{x\}}\} = C_A \cap j[X]$$

  que es cerrado relativo en $j[X]$. Como todo cerrado F de X es intersección de elementos de $\mathscr{A}$, $F = \bigcap_{A\in H} A$, y j es inyectiva deducimos que $j[F] = \bigcap_{A\in H} j[A]$ que es cerrado en $j[X]$ por ser intersección de cerrados.
  De este modo j resulta ser un embebimiento, y podemos interpretar X como un subespacio de $\mathscr{A}(X)$ identificando cada elemento x con su imagen $j(x) = \mathscr{F}_{\{x\}}$.

La imagen de j es un subconjunto denso en $\mathscr{A}(X)$. En efecto, dado un abierto básico no vacío V_A ($A \in \mathscr{A}$) y fijado un elemento $\mathscr{U} \in V_A$, tenemos que existe $B \in \mathscr{U}$ con $B \cap A = \emptyset$ por la caracterización de los $\mathscr{A}$-ultrafiltros. Si $y \in B$ entonces $\mathscr{F}_{\{y\}} \in V_A$.

Notar también que para cada $A \in \mathscr{A}$ es $\overline{A}^{\mathscr{A}(X)} = C_A$. Como $A \subseteq C_A$ cerrado entonces $\overline{A}^{\mathscr{A}(X)} \subseteq C_A$. Recíprocamente, si $\mathscr{U} \in C_A$ entonces $A \in \mathscr{U}$. Para cada entorno abierto básico V_B de $\mathscr{U}$ existe $D \in \mathscr{U}$ con $D \cap B = \emptyset$. El conjunto $D' = D \cap A \in \mathscr{U}$ es no vacío y tiene sus elementos en V_B, con lo que $A \cap V_B \supseteq D' \neq \emptyset$.

Finalmente vamos a ver que todo $\mathscr{A}$-ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre X converge hacia el propio $\mathscr{U} \in \mathscr{A}(X)$ visto como elemento de $\mathscr{A}(X)$. Una base de entornos de $\mathscr{U}$ como elemento de $\mathscr{A}(X)$ viene dada por $\{V_A : A \notin \mathscr{U}\}$. Fijado uno de estos entornos V_A, por las propiedades de los $\mathscr{A}$-ultrafiltros existirá $B \in \mathscr{U}$ tal que $B \cap A = \emptyset$. Pero interpretando $B \subseteq X \subseteq \mathscr{A}(X)$ tendremos que $B \subseteq V_A$. El límite es único por ser el espacio $\mathscr{A}(X)$ Hausdorff. □

2.2.1. Extensión de funciones continuas a la compactificación Wallman

Cuando tenemos un espacio topológico arbitrario T y fijamos un subespacio denso X, es natural preguntarse cuándo una aplicación continua $f : X \to Y$ (donde Y es otro espacio topológico cualquiera) admite una extensión continua a T. En el caso en que T es compacto, si $\tilde{f} : T \to Y$ es una tal extensión continua de f entonces $f[X]$ está contenida en el compacto $\tilde{f}[T]$, de modo que para estudiar este problema podemos restringirnos al caso en que $Y = K$ es un espacio compacto. Supondremos además que K es Hausdorff ya que son estos el tipo de espacios que nos interesan, y las extensiones, en caso de que existan, serán únicas por la proposición 2.1.2.

En [31, teorema 3.2.1, p. 136] se da la siguiente caracterización: $f : X \to K$ puede extenderse a T (espacio topológico arbitrario) si y sólo si para cualesquiera F_1, F_2 subconjuntos cerrados disjuntos de K se tiene que $f^{-1}[F_1]$ y $f^{-1}[F_2]$ tienen clausuras disjuntas en T). Para los compactificaciones tipo Wallman, Frink [36] da otra condición de continuidad uniforme que define de la siguiente manera.

Definición 2.2.5. *Sea $\mathscr{A}$ una base de cerrados en X. Una aplicación $f : X \to K$ donde K es un compacto Hausdorff se dice que es $\mathscr{A}$-*uniformemente continua *si para cada cubrimiento finito abierto $\{W_j : j = 1, ..., n\}$ de K existe un cubrimiento abierto finito de X de la forma*

$$\{X \setminus A_i : A_i \in \mathscr{A}, i = 1, ..., n\}$$

tal que para cada i el conjunto $f[X \setminus A_i]$ está contenido en algún W_j.

Damos a continuación una caracterización de las aplicaciones continuas sobre X con valores en un compacto Hausdorff que se pueden extender a la compactificación $\mathscr{A}(X)$. Señalar que la prueba de 3) $\Rightarrow$ 1) que aquí exponemos posee algunas diferencias con la prueba del libro de Engelking [31, teorema 3.2.1, p. 136], que nos serán de utilidad más adelante.

Proposición 2.2.6. *Sea $f : X \to K$ una aplicación continua con valores en un espacio compacto Hausdorff K. Son equivalentes:*

1) *f se puede extender a una aplicación continua $\tilde{f} : \mathscr{A}(X) \to K$.*
2) *f es $\mathscr{A}$-uniformemente continua.*
3) *Si F_1, F_2 son dos subconjuntos cerrados disjuntos de K entonces $f^{-1}[F_1]$ y $f^{-1}[F_2]$ tienen clausuras disjuntas en $\mathscr{A}(X)$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Sea $\tilde{f} : \mathscr{A}(X) \to K$ la extensión de f y supongamos que $\{W_1, ..., W_n\}$ es un cubrimiento finito abierto de K. La familia $\{\tilde{f}^{-1}[W_j] : j = 1, ..., n\}$ es entonces un cubrimiento abierto de $\mathscr{A}(X)$. Cada $p \in \mathscr{A}(X)$ está contenido en un $\tilde{f}^{-1}[W_j]$, de modo que existe un abierto básico V_{A_p} con $p \in V_{A_p} \subseteq \tilde{f}^{-1}[W_j]$. Como $\mathscr{A}(X)$ es compacto, el cubrimiento abierto $\{V_{A_p} : p \in \mathscr{A}(X)\}$ admite un subcubrimiento finito $\{V_{A_i} : i = 1, ..., m\}$. Dado que $V_{A_i} \cap X = X \setminus A_i$, deducimos que $\{X \setminus A_i : i = 1, ..., m\}$ es cubrimiento finito de X tal que cada $f[X \setminus A_i] \subseteq \tilde{f}[V_{A_i}]$ está contenido dentro de un W_j por construcción.

2) $\Rightarrow$ 3): Sean F_1, F_2 subconjuntos cerrados disjuntos de K y $\mathscr{U}$ un $\mathscr{A}$-ultrafiltro que pertenece a la clausura en $\mathscr{A}(X)$ de los conjuntos $f^{-1}[F_1]$ y $f^{-1}[F_2]$. Como $\{K \setminus F_1, K \setminus F_2\}$ es un cubrimiento abierto de K, podemos usar la hipótesis 2) para deducir que existe un cubrimiento finito abierto de la forma $\{X \setminus A_i : i = 1, ...m\}$ de manera que cada $f[X \setminus A_i]$ está contenido en un $K \setminus F_j$ para algún j. Notemos que $\bigcap_{i=1}^m A_i = \emptyset$, luego alguno de estos elementos no pertenece a $\mathscr{U}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A_1 \notin \mathscr{U}$ y $f[X \setminus A_1] \subseteq F_1$. Entones V_{A_1} es un entorno abierto de $\mathscr{U}$ tal que

$$V_{A_1} \cap f^{-1}[F_2] = X \cap V_{A_1} \cap f^{-1}[F_2] = (X \setminus A_1) \cap f^{-1}[F_2] \subseteq f^{-1}[F_1] \cap f^{-1}[F_2] = \emptyset,$$

contradiciendo que $\mathscr{U}$ pertenece a la clausura de $f^{-1}[F_2]$ en $\mathscr{A}(X)$.

3) $\Rightarrow$ 1): Vamos a construir una extensión $\tilde{f} : \mathscr{A}(X) \to K$ asignando a cada $\mathscr{U} \in \mathscr{A}(X)$ el único punto $\tilde{f}(\mathscr{U})$ perteneciente a la intersección $\bigcap_{A \in \mathscr{U}} \overline{f[A]}$.

Fijado $\mathscr{U} \in \mathscr{A}(X)$, la familia de cerrados $\{\overline{f[A]} : A \in \mathscr{U}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita pues

$$\emptyset \neq f[A_1 \cap ... \cap A_n] \subseteq \overline{f[A_1]} \cap ... \cap \overline{f[A_n]}.$$

Por la compacidad de K se deduce que $\bigcap_{A \in \mathscr{U}} \overline{f[A]} \neq \emptyset$.

Recordar que $\{V_B : B \notin \mathscr{U}\}$ es una base de entornos de $\mathscr{U}$. Si $B \notin \mathscr{U}$ entonces existe $A \in \mathscr{U}$ tal que $A \cap B = \emptyset$, de modo que $A \subseteq V_B \cap X$. Deducimos entonces que

$$\emptyset \neq \bigcap_{A \in \mathscr{U}} \overline{f[A]} \subseteq \bigcap_{B \notin \mathscr{U}} \overline{f[V_B \cap X]}.$$

Vamos a probar que la intersección de la derecha contiene a lo sumo un punto. Si k_1, k_2 fueran dos puntos distintos en dicha intersección, como K es Hausdorff compacto existen entornos W_1 de k_1 y W_2 de k_2 verificando $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$. De este modo, $\overline{W_1}$ y $\overline{W_2}$ son cerrados disjuntos en K, y usando la hipótesis 3) deducimos que $\overline{f^{-1}[W_1]}^{\mathscr{A}(X)} \cap \overline{f^{-1}[W_2]}^{\mathscr{A}(X)} = \emptyset$, luego $\mathscr{U}$ no pertenece a alguno de ellos. Podemos suponer que $\mathscr{U} \in \mathscr{A}(X) \setminus \overline{f^{-1}[W_1]}^{\mathscr{A}(X)}$. Entonces existe V_B entorno abierto de $\mathscr{U}$ tal que $V_B \cap f^{-1}[W_1] = \emptyset$, lo que implica $f[V_B \cap X] \subseteq K \setminus W_1$. De aquí se deduce que $k_1 \in W_1$ no pertenece a $\overline{f[V_B \cap X]}$, lo que es absurdo.

La función $\tilde{f}$ definida como $\{\tilde{f}(\mathscr{U})\} = \bigcap_{A\in\mathscr{U}} \overline{f[A]} = \bigcap_{B\notin\mathscr{U}} \overline{f[V_B \cap X]}$ coincide con f sobre X, ya que $f(x) \in f[A]$ para cada $A \in \mathscr{F}_{\{x\}}$.

Por último, $\tilde{f}$ es continua, ya que si W es un entorno abierto de $\tilde{f}(\mathscr{U})$ entonces $\bigcap_{B\notin\mathscr{U}} \overline{f[V_B \cap X]} \subseteq W$ implica por la compacidad que $\{\overline{f[V_B \cap X]} : B \notin \mathscr{U}\} \cup \{K \setminus W\}$ no tiene la propiedad de la intersección finita, luego existe un número finito de elementos $B_1, \ldots, B_m \notin \mathscr{U}$ tales que

$$\overline{f[V_{B_1} \cap X]} \cap \ldots \cap \overline{f[V_{B_m} \cap X]} \subseteq W.$$

Por tanto $C = B_1 \cup \ldots \cup B_m \notin \mathscr{U}$ verifica

$$\overline{f[V_C \cap X]} \subseteq \overline{f[V_{B_1} \cap X]} \cap \ldots \cap \overline{f[V_{B_m} \cap X]} \subseteq W,$$

de donde $\tilde{f}[V_C] \subseteq W$ por la definición de $\tilde{f}$. Como V_C es entorno de $\mathscr{U}$, hemos probado la continuidad de $\tilde{f}$.

□

2.3. Compactificación de Stone-Čech

Vamos a obtener como caso particular de la compactificación tipo Wallman la compactificación de Stone-Čech de un espacio completamente regular.

2.3.1. Conjuntos cero

Las propiedades topológicas de los espacios completamente regulares están íntimamente relacionada con las propiedades de los conjuntos que son los ceros de funciones continuas.

Definición 2.3.1. *Sea X un espacio topológico. Denotaremos por $C(X)$ al conjunto de las aplicaciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$ y por $C_b(X)$ al subconjunto de $C(X)$ formado por todas las funciones acotadas.*

Si $f \in C(X)$ entonces

$$\mathscr{Z}(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}[\{0\}]$$

es un conjunto cerrado que se llamaremos conjunto cero *de f.*

Como notación adicional:

- $\mathscr{Z}[\mathscr{H}] = \{\mathscr{Z}(f) : f \in \mathscr{H}\}$ para cada $\mathscr{H} \subseteq C(X)$.
- $\mathscr{Z}(X) := \mathscr{Z}[C(X)] = \{\mathscr{Z}(f) : f \in C(X)\} = \{$ conjuntos cero de X $\}$.
- Si $f, g \in C(X)$

$$(f \wedge g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x))\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

$$(f \vee g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x))\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

también son funciones continuas sobre X.

La siguiente proposición nos dice que para obtener $\mathscr{Z}(X)$ es suficiente considerar las funciones acotadas.

Proposición 2.3.2. $\mathscr{Z}(X) = \mathscr{Z}[C_b(X)]$. *De hecho, todo conjunto cero C verifica que $C = \mathscr{Z}(f)$ para una función $f \in C(X)$ con $0 \leq f \leq 1$.*

Demostración. Si $f \in C(X)$ y $\mathbf{1}$ es la función constantemente igual a 1 entonces se tiene que $\mathscr{Z}(f) = \mathscr{Z}(|f|) = \mathscr{Z}(|f| \wedge \mathbf{1})$ obviamente, luego $\mathscr{Z}(X) \subseteq \mathscr{Z}[C_b(X)]$. El contenido recíproco es obvio. □

Proposición 2.3.3. *Los conjuntos cero poseen las siguientes propiedades:*

(a) $\mathscr{Z}(X)$ *es un conjunto de cerrados en X.*
(b) Si $A_1,\ldots,A_n \in \mathscr{Z}(X)$ entonces $\cup_{j=1}^n A_j, \cap_{j=1}^n A_j \in \mathscr{Z}(X)$.
(c) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos cero entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{Z}(X)$.
(d) Si $f \in C(X)$ entonces $\{x \in X : f(x) \geq 0\}$ es un conjunto cero. En particular, dado $a \in \mathbb{R}$ los conjuntos de la forma $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ o $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ son conjuntos cero.

Demostración. Los conjuntos cero son conjuntos cerrados por ser imágenes inversas del conjunto cerrado $\{0\}$ a través de funciones continuas, con lo cual (a) es obvio. Para (b) observemos que si $A_i = \mathscr{Z}(f_i) = \mathscr{Z}(|f_i|)$ entonces

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \mathscr{Z}(|f_1|\cdot\ldots\cdot|f_n|), \quad \bigcap_{j=1}^n A_j = \mathscr{Z}(|f_1|+\ldots+|f_n|).$$

Para (c), si $A_n = \mathscr{Z}(f_n)$ es una sucesión de conjuntos cero disjuntos entonces la sucesión de funciones continuas $g_n = |f_n| \wedge 2^{-n}$ verifica que $A_n = \mathscr{Z}(g_n)$ para cada n. Como $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ es una series de funciones no negativas que converge uniformemente sobre X, deducimos que g es una función continua que satisface

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathscr{Z}(g) \in \mathscr{Z}(X).$$

Por último, si $f \in C(X)$ entonces $\{x \in X : f(x) \geq 0\} = \mathscr{Z}(f \wedge 0)$. Usando esta igualdad para las funciones continuas $g(x) = f(x) - a$ y $h(x) = -g(x)$ se deduce el resto.

□

Definición 2.3.4. *Sea A un subconjunto de X. Se dice que $V \subseteq X$ es un* entorno cero *de A si V es conjunto cero y además es entorno de A (i.e. entorno de todos los puntos de A).*

Decimos que dos subconjuntos A y B de X están *completamente separados* si existe una función $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$ si $x \in A$ y $f(x) = 0$ si $x \in B$. Esta definición es equivalente a la que resulta de sustituir $f \in C(X)$ por $f \in C_b(X)$. Para ello basta observar que si $f \in C(X)$ verifica la definición anterior entonces $|f| \wedge \mathbf{1} \in C_b(X)$ también.

Proposición 2.3.5. *Dos conjuntos están completamente separados si y sólo si están contenidos en entornos cero disjuntos.*

Demostración. Supongamos que $A, B \subseteq X$ están contenidos en conjuntos cero disjuntos, pongamos $\mathscr{Z}(f)$ y $\mathscr{Z}(g)$ respectivamente. Entonces $|f|+|g|$ es una función continua que no tiene ceros, luego la función $h = |f|/(|f|+|g|) \in C^*(X)$ está definida y verifica $h|_{\mathscr{Z}(f)} = 0$ y $h|_{\mathscr{Z}(g)} = 1$.

Recíprocamente, si existe $f \in C(X)$ con $f|_A = 1$ y $f|_B = 0$ entonces $Z_A = f^{-1}[[2/3, +\infty)]$ y $Z_B = f^{-1}[(-\infty, 1/3]]$ son entornos cero disjuntos de A y B respectivamente. Además, Z_A y Z_B son conjuntos cero por (d) de la proposición 2.3.3. Por último, $B \subseteq f^{-1}[(-\infty, 1/3)] \subseteq Z_B$ muestra que Z_B es entorno de todos los puntos de B, y $A \subseteq f^{-1}[(2/3, \infty)] \subseteq Z_A$ dice lo mismo de Z_A.

$\square$

Teorema 2.3.6. *Sea X un espacio topológico T_1. Entonces X es completamente regular si y sólo si $\mathscr{Z}(X)$ es una base de cerrados.*

Demostración. Supongamos que X es completamente regular. Si F es un conjunto cerrado y p es un punto que no pertenece a X entonces $\{p\}$ y F están completamente separados por definición. Por la proposición 2.3.5 tendremos que existe un entorno cero Z de F tal que $p \notin Z$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{Z}(X)$ es una base de cerrados. Si F es un subconjunto cerrado de X y $p \in X \setminus F$ entonces existe $\mathscr{Z}(g) \in \mathscr{Z}(X)$ tal que $p \notin \mathscr{Z}(g)$, lo que en particular significa que $g(p) \neq 0$. Entonces $f := g \cdot g(p)^{-1}$ es una función continua en X tal que $f(x) = 0$ para cada $x \in F$ y $f(p) = 1$. $\square$

2.3.2. z-filtros y z-ultrafiltros

Considerando $\mathscr{A} = \mathscr{Z}(X)$ vamos a estudiar algunas propiedades de los $\mathscr{Z}(X)$-filtros y $\mathscr{Z}(X)$-ultrafiltros. Para simplificar la notación nos referiremos a ellos simplemente como z-filtros y z-ultrafiltros sobre X. Si X es completamente regular, la familia $\mathscr{A} = \mathscr{Z}(X)$ presenta una buena cantidad de propiedades como hemos visto en resultados anteriores. Así por ejemplo, $\mathscr{Z}(X)$ contiene una base de entornos de cada punto (los entornos cero) por el apartado (b) del teorema 2.3.6. De este modo, la mayor parte de los resultados vistos sobre $\mathscr{A}$-filtros son válidos en este caso. Incluso se pueden obtener algunos resultados más fuertes en relación a z-filtros como exponemos a continuación.

Proposición 2.3.7. *Supongamos que X es completamente regular.*

1. *Si $\mathscr{F}$ es un z-filtro que contiene un z-filtro primo entonces $\mathscr{F}$ es z-filtro primo.*
2. *Si $\mathscr{F}$ es un z-filtro primo entonces $p \in X$ es punto adherente de $\mathscr{F}$ si y sólo si $\mathscr{F}$ converge hacia p.*

Demostración. 1. Supongamos que $A \cup B \in \mathscr{F}$ donde $A = \mathscr{Z}(f), B = \mathscr{Z}(g)$. Sea $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ un z-filtro primo más grueso que $\mathscr{F}$. Observar que para cada función $h \in C(X)$ se tiene que

$$\mathscr{Z}(h \wedge 0) \cup \mathscr{Z}(h \vee 0) = \mathscr{Z}((h \wedge 0) \cdot (h \vee 0)) = X \in \mathscr{F}' \Rightarrow \mathscr{Z}(h \wedge 0) \in \mathscr{F}' \text{ ó } \mathscr{Z}(h \vee 0) \in \mathscr{F}'.$$

En particular, para $h = |f| - |g|$ será $\mathscr{Z}((|f| - |g|) \wedge 0) \in \mathscr{F}$ o $\mathscr{Z}((|f| - |g|) \vee 0) \in \mathscr{F}$. Supongamos que $C = \mathscr{Z}((|f| - |g|) \wedge 0) \in \mathscr{F}$. Entonces $|f| \geq |g|$ en C, de modo que

$$\mathscr{Z}(g) \supseteq \mathscr{Z}(f \cdot g) \cap C \in \mathscr{F},$$

por ser $\mathscr{Z}(f\cdot g)=A\cup B\in\mathscr{F}$. Se sigue que $B=\mathscr{Z}(g)\in\mathscr{F}$ por la definición de z-filtro.

En el caso $C=\mathscr{Z}((|f|-|g|)\vee 0)\in\mathscr{F}$ se razona de manera análoga.

2. Supongamos que $\mathscr{F}$ es z-filtro primo. Ya sabemos que todo punto límite es adherente por la proposición 1.1.28. Sea V un entorno cero de p. Existe un entorno abierto U de p tal que $U\subseteq V$. Como X es completamente regular $\mathscr{Z}(X)$ es una base de cerrados (teorema 2.3.6), luego existe un conjunto cero Z tal que $X\setminus V\subseteq X\setminus U\subseteq Z$ y $p\notin Z$. Pero $V\cup Z=X\in\mathscr{F}$, de modo que $V\in\mathscr{F}$ o $Z\in\mathscr{F}$. Como $p\notin Z$ y p es punto adherente de $\mathscr{F}$ se deduce $Z\notin\mathscr{F}$ y necesariamente $V\in\mathscr{F}$. Basta tener en cuenta que los entornos cero de p son una base de entornos para concluir el resultado. $\square$

Enunciamos primero un lema que será de utilidad más adelante.

Lema 2.3.8. *Supongamos que T es completamente regular. Sea Z un conjunto cero de X y $p\in T$. Si $p\in\overline{Z}^T$ entonces existe un z-ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre X tal que $Z\in\mathscr{U}$ y es convergente hacia p en T.*

Demostración. Sea $\beta=\{Z\cap V:\ V \text{ es entorno cero de } p \text{ en } T\}$. Notar que todos los elementos son no vacíos pues $p\in\overline{Z}^T$ y es cerrado para intersecciones finitas. Además $\beta\subseteq\mathscr{Z}(X)$ ya que $Z\cap V=Z\cap(V\cap X)$ donde $Z\in\mathscr{Z}(X)$ por hipótesis y $V\cap X\in\mathscr{Z}(X)$ usando que $X\cap Z(f)=Z(f|_X)$.

La familia β es base de z-filtro en X, luego estará contenida en un z-ultrafiltro sobre X que llamamos $\mathscr{U}$. Dicho z-ultrafiltro contiene a $Z\in\beta$, y converge hacia p, ya que dado cualquier entorno cero V de p en T (los cuales forman una base de entornos de p en T) se tiene que $V\supseteq V\cap Z\in\mathscr{U}$. $\square$

2.3.3. Construcción de la compactificación de Stone-Čech.

Damos ya la definición formal de la compactificación de Stone-Čech.

Definición 2.3.9. *Una compactificación Hausdorff (i,Z) de X se dice que es una* compactificación de Stone-Čech *de X si para toda aplicación continua $f:X\to K$ con valores en un compacto Hausdorff K existe una única extensión continua $\overline{f}:Z\to K$ tal que $\overline{f}\circ i=f$.*

Observemos que, en caso de que exista, una compactificación de Stone-Čech (i,Z) es un máximo en $(\overline{\mathrm{Com}(X)},\geq)$, pues si (Y,g) es otra compactificación Hausdorff entonces existe por hipótesis una extensión $\tilde{g}:Z\to Y$ de g tal que $\tilde{g}\circ i=g$, coincidiendo con la definición del orden $(Z,i)\geq(Y,g)$. Por tanto, este tipo de compactificación es única salvo homeomorfismos. Podemos entonces hablar de la compactificación de Stone-Čech de X y denotarla por βX .

Además de la definición hay otras propiedades que caracterizan la compactificación de Stone-Čech de un espacio X. El siguiente teorema recoge alguna de ellas.

Teorema 2.3.10. *Supongamos que X es subconjunto denso de un espacio T que es completamente regular (por ejemplo, si T es un compacto Hausdorff). Son equivalentes:*

(1) Si $\tau:X\to K$ es aplicación continua y K es compacto Hausdorff, entonces τ admite una extensión continua a T.

(2) *Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada entonces f admite una extensión continua y acotada a T.*
(3) *Dos conjuntos completamente separados en X están completamente separados en T.*
(4) *Dos conjuntos cero de $\mathscr{Z}(X)$ disjuntos tienen clausuras en T también disjuntas.*
(5) *Si Z_1, Z_2 son conjuntos cero de $\mathscr{Z}(X)$ entonces*

$$\overline{(Z_1 \cap Z_2)}^T = \overline{Z_1}^T \cap \overline{Z_2}^T.$$

(6) *Todo punto de T es límite de un único z-ultrafiltro de X.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $f : X \to \mathbb{R}$ es una función acotada entonces $f[X]$ está contenido en un intervalo compacto $[a,b]$. Luego realmente podemos escribir f como una aplicación $f : X \to [a,b]$ y usando (1) deducimos que existe $\tilde{f} : T \to [a,b]$ extensión continua de f.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sean A y B dos conjuntos completamente separados en X. Entonces existe una función $f \in C_b(X)$ tal que $f[D_1] = \{1\}$ y $f[D_2] = \{0\}$. Por hipótesis f se extiende a $\tilde{f} \in C_b(T)$, de modo que D_1 y D_2 están completamente separados en T.

(3) $\Rightarrow$ (4): Si Z_1 y Z_2 son conjuntos cero disjuntos, entonces son completamente separados. En efecto, si $Z_1 = Z(f)$ y $Z_2 = Z(g)$ entonces la función continua $h = |f|/(|f| + |g|)$ verifica $h[Z_1] = \{1\}$ y $h[Z_2] = \{0\}$. Por hipótesis Z_1 y Z_2 son también conjuntos completamente separados en T. Del teorema 2.3.5 se sigue que Z_1 y Z_2 están contenidos en conjuntos cero de T (que serán cerrados de T) disjuntos. De modo que $\overline{Z_1}^T$ y $\overline{Z_2}^T$ estarán contenidos en los mismos conjuntos cero disjuntos.

(4) $\Rightarrow$ (5): El contenido $\subseteq$ es obvio, veamos la inclusión recíproca. Si $p \in \overline{Z_1}^T \cap \overline{Z_2}^T$ entonces para todo entorno cero V de p en T se tiene que $p \in \overline{(V \cap Z_1)}^T$ y $p \in \overline{(V \cap Z_2)}^T$. Usando (3) deducimos que $V \cap (Z_1 \cap Z_2) \neq \emptyset$ para cada entorno cero V de p en T. Como los entornos cero son bases de entornos (por ser T es completamente regular y la proposición 2.3.5) concluimos $p \in \overline{Z_1 \cap Z_2}^T$.

(5) $\Rightarrow$ (6): Ya que X es denso en T, si $p \in T$ entonces $p \in \overline{X}^T$. El lema 2.3.8 prueba la existencia de un z-ultrafiltro en X convergente hacia p. Para ver la unicidad supongamos que $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2$ son z-ultrafiltros distintos de X que convergen hacia p, o equivalentemente, que tienen a p entre sus puntos de adherencia en T. Por ser distintos existen $Z_1 \in \mathscr{U}_1$ y $Z_2 \in \mathscr{U}_2$ tales que $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$. Entonces

$$\overline{Z_1}^T \cap \overline{Z_2}^T = \overline{Z_1 \cap Z_2}^T = \emptyset.$$

con lo que p no puede estar en $\overline{Z_1}^T$ y $\overline{Z_2}^T$ simultáneamente.

(6) $\Rightarrow$ (1): Sea $\tau : X \to K$ con K compacto Hausdorff. Observemos que si $E \in \mathscr{Z}(K)$ entonces existe $g \in C(K)$ con $E = Z(g)$. Pero entonces $\tau^{-1}[E] = Z(g \circ \tau) \in \mathscr{Z}(X)$. Vamos a definir una aplicación $\overline{\tau} : T \to K$ y comprobaremos que extiende a τ de manera continua.

Dado $p \in T$ existe por hipótesis un único z-ultrafiltro $\mathscr{U}^p$ en X convergente hacia p. La familia

$$\mathscr{G}^p = \{E \in \mathscr{Z}(K) : \tau^{-1}[E] \in \mathscr{U}^p\}$$

es un z-filtro en K. En efecto, obviamente es no vacía ($K \in \mathscr{G}_p$), no contiene al conjunto vacío, si $E_1 \subseteq E_2$ entonces $\tau^{-1}[E_1] \subseteq \tau^{-1}[E_2]$, y $\tau^{-1}[E_1 \cap E_2] = \tau^{-1}[E_1] \cap \tau^{-1}[E_2]$. Además es z-filtro primo pues si $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{G}^p$ entonces

$$\tau^{-1}[E_1 \cup E_2] = \tau^{-1}[E_1] \cup \tau^{-1}[E_2] \in \mathscr{U}^p,$$

de donde $\tau^{-1}[E_1] \in \mathscr{U}^p$ o $\tau^{-1}[E_2] \in \mathscr{U}^p$, es decir, $E_1 \in \mathscr{G}^p$ o $E_2 \in \mathscr{G}^p$.

Como K es compacto Hausdorff, $\mathscr{G}^p$ tiene un punto de adherencia pues sus elementos son cerrados con la propiedad de la intersección finita, que debe ser un punto límite por la proposición 2.3.7. Notar que hay unicidad por ser un espacio Hausdorff. Definimos $\overline{\tau}(p)$ como dicho límite.

- $\overline{\tau}$ es una extensión de τ: Si $p \in X$ entonces la condición $p \in \bigcap_{F \in \mathscr{U}^p} F$ implica que $\tau(p) \in \bigcap_{E \in \mathscr{G}^p} E = C(\mathscr{G}^p)$, de modo que $\overline{\tau}(p) = \tau(p)$.
- Si $F \in \mathscr{Z}(K)$, $Z = \tau^{-1}[F]$ y $p \in \overline{Z}^T$ entonces $\overline{\tau}(p) \in F$: Dado $p \in \overline{Z}^T$ tenemos que existe $\mathscr{F}$ z-ultrafiltro tal que $Z \in \mathscr{F}$ y $\mathscr{F}$ converge hacia p por el lema 2.3.8. Como el z-ultrafiltro $\mathscr{U}^p$ era único, deducimos que $Z \in \mathscr{F} = \mathscr{U}^p$ y

  $$F \in \{E \in \mathscr{Z}(K) : \tau^{-1}[E] \in \mathscr{U}^p\} = \mathscr{G}^p,$$

  es decir, $\overline{\tau}(p) \in F$ por ser punto de adherencia.
- $\overline{\tau}$ es continua: Sea $p \in T$ y F un entorno cero de $\overline{\tau}(p)$. Como $\overline{\tau}(p)$ y $K \setminus F$ están completamente separados (todo espacio compacto Hausdorff es completamente regular) existe un entorno cero F' de $K \setminus F$ tal que $\overline{\tau}(p) \notin F'$.
  Entonces $F \cup F' = K$ implica que $Z \cup Z' = \tau^{-1}[F] \cup \tau^{-1}[F'] = X$, de donde $\overline{Z}^T \cup \overline{Z'}^T = T$. Como $\overline{\tau}(p) \notin F'$ entonces $p \notin \overline{Z'}^T$ por el punto anterior. Así pues $T \setminus \overline{Z'}^T$ es un entorno abierto de p. Además, si $q \in T \setminus \overline{Z'}^T$ entonces $q \in \overline{Z}^T$, de modo que $\overline{\tau}(q) \in F$ de nuevo por el punto anterior.

□

Vamos a probar que todo espacio completamente regular X admite una compactificación de Stone-Čech, para lo cual usaremos la construcción de Frink de las compactificaciones tipo Wallman tomando $\mathscr{A} = \mathscr{Z}(X)$ la familia de todos los conjuntos cero de X.

Lema 2.3.11. *Si X es completamente regular entonces $\mathscr{A} = \mathscr{Z}(X)$ es una base normal de X.*

Demostración. Se trata de una base para los conjuntos cerrados por el teorema 2.3.6. Además verifica las propiedades de familia normal:

1. $\mathscr{Z}(X)$ es cerrado para intersecciones y uniones ambas finitas por la proposición 2.3.3.
2. $\mathscr{Z}(X)$ es disjuntiva: si F es un subconjunto cerrado de X y $p \notin F$ entonces $\{p\}$ y F están completamente separados. Por la proposición 2.3.5 podemos entontrar un entorno cero U de p tal que $U \cap F = \emptyset$.
3. Sean $Z_1, Z_2 \in \mathscr{Z}(X)$ conjuntos cero disjuntos. Si $Z_i = Z(h_i)$ para $h_i \in C_b(X)$ $(i = 1, 2)$, entonces la función $f = |h_1|/(|h_1| + |h_2|)$ es continua, acotada y verifica que $f(x) = 0$ si $x \in Z_1$ y $f(x) = 1$ si $x \in Z_2$. Los subconjuntos cerrados $F_1 = \{x : f(x) \leq 1/3\}$ y $F_2 = \{x : f(x) \geq 1/3\}$ son conjuntos cero por el apartado (d) de la proposición 2.3.3. Además satisfacen las inclusiones

   $$Z_1 \subseteq X \setminus F_2 \subseteq F_1 \subseteq X \setminus Z_2,$$

de donde se deduce el resultado. □

Teorema 2.3.12. *Todo espacio completamente regular X tiene una compactificación de Stone-Čech βX.*

Demostración. Como $\mathscr{A} = \mathscr{Z}(X)$ es una base normal de X, el teorema 2.2.4 nos da que el conjunto βX de todos los z-ultrafiltros sobre X se puede dotar de una topología con la que es un espacio compacto Hausdorff que tiene una base de cerrados dada por la familia de los conjuntos $\{C_Z : Z \in \mathscr{Z}(X)\}$ de la forma

$$C_Z = \{\mathscr{U} \in \beta X : Z \in \mathscr{U}\}.$$

La aplicación $j : X \to \beta X$ definida como $j(x) = \mathscr{U}_x = \{Z \in \mathscr{Z}(X) : x \in Z\}$ es un embebimiento cuya imagen es densa en βX. Además todo elemento de βX es límite de un único z-ultrafiltro sobre X y todo z-ultrafiltro sobre X es convergente a un punto de βX.

Usando esta última propiedad tenemos que satisface la condición (5) del teorema 2.3.10 (podemos aplicarlo ya que βX es completamente regular por ser compacto Hausdorff) con lo que concluye la prueba. □

Damos ya la caracterización de los espacios que admiten una compactificación.

Corolario 2.3.13. *Para un espacio topológico X son equivalentes:*

(1) X es un espacio semi-normal.
(2) X admite una compactificación (Hausdorff).
(3) X es completamente regular.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Es el teorema 2.2.4. (2) $\Rightarrow$ (3): Se ha visto en la proposición 2.1.5. (3) $\Rightarrow$ (1): Ya hemos visto que $\mathscr{Z}(X)$ constituye una base normal de X si éste es completamente regular. □

Nota 2.4. *Hemos visto que para un espacio completamente regular X, la familia de los conjuntos cero $\mathscr{Z}(X)$ es una base normal tal que la compactificación Wallman asociada es βX. Como mencionamos en una sección anterior, la compactificación por un punto (o de Alexandroff) de un espacio Hausdorff localmente compacto también se puede obtener seleccionando una base normal adecuada. Aunque no lo probaremos aquí, tomando como base normal la familia de los conjuntos cero de funciones que son constantes en el complementario de un compacto se obtiene dicha compactificación (ver [5]).*

Nota 2.5. *Existen otras construcciones de la compactificación de Stone-Čech en la que no intervienen los filtros. Por ejemplo, en [23] puede encontrarse una construcción basada en construir un embebimiento del espacio completamente regular original X en el dual de $C_b(X)$ equipado con la topología ω^*. Se comprueba entonces que la clausura de X en $C_b(X)$ (identificando X con su imagen) verifica las condiciones de la compactificación de Stone-Čech.*

2.5.1. Compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto

Supongamos que X es un espacio topológico equipado con la topología discreta. Se trata de un espacio completamente regular pues cualquier función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua. Podemos entonces aplicar el teorema 2.3.12 para deducir la existencia de βX la compactificación de Stone-Čech de X. Notar que $\mathscr{Z}(X) = \mathscr{P}(X)$, de modo que los z-filtros son realmente los filtros usuales. Siguiendo la construcción de la compactificación en el teorema de Frink, βX es el conjunto de todos los ultrafiltros sobre X y su topología es la generada por la familia $\{V_A : A \in \mathscr{P}(X)\}$ donde $V_A = \{\mathscr{U} \in \beta X : A \notin \mathscr{U}\}$.

Como ahora estamos trabajando con ultrafiltros, $A \notin \mathscr{U}$ equivale a que $X \setminus A \in \mathscr{U}$. De este modo, una base de abiertos básicos, que será la que manejaremos de ahora en adelante, es $\{V(E) : E \in \mathscr{P}(X)\}$, donde

$$V(E) := V_{X\setminus E} = \{\mathscr{U} \in \beta X : E \in \mathscr{U}\}.$$

Si E, E_1, E_2 son subconjuntos arbitrarios de X entonces se verifican las siguientes propiedades:

- $V(E_1 \cap E_2) = V(E_1) \cap V(E_2)$: en general, para cualquier filtro $\mathscr{F}$ se tiene que $E_1 \cap E_2 \in \mathscr{F}$ si y sólo si $E_1, E_2 \in \mathscr{F}$ usando las propiedades (I) y (II) de la definición de filtro.
- $V(X \setminus E) = \beta X \setminus V(E)$: Basta usar que para todo ultrafiltro $\mathscr{U} \in \beta X$ y $E \in X$ se tiene que $E \in \mathscr{U}$ o $X \setminus E \in \mathscr{U}$, siendo ambas posibilidades excluyentes.
- $V(E_1 \cup E_2) = V(E_1) \cup V(E_2)$: En general, la propiedad (I) de filtro muestra que si $E_1 \in \mathscr{U}$ o $E_2 \in \mathscr{U}$ entonces $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{U}$. Pero en el caso de ultrafiltros, la proposición 1.1.18 nos da que el recíproco también es cierto.
- $V(\emptyset) = \emptyset$: Basta usar la propiedad (III) de los filtros.
- $V(X) = \beta X$: Como todo filtro es no vacío por definición, la propiedad (I) implica que X pertenece a cualquier filtro.

La siguiente proposición recoge algunas de las principales propiedades de βX.

Proposición 2.5.1. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(a) βX es compacto, Hausdorff y contiene a X como subconjunto denso y discreto (en la topología inducida) a través del embebimiento $x \mapsto \mathscr{F}_{\{x\}} = \{A \subseteq X : x \in A\}$. En particular, si X es numerable entonces βX es separable.

(b) El conjunto de puntos aislados de βX es X. En particular, X es abierto.

(c) Los conjuntos $V(E)$ para $E \subseteq X$ son clopen *(abiertos y cerrados) de βX.*

(d) Para cada $E \subseteq X$ es $\overline{E}^{\beta X} = V(E)$. En particular, si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\overline{A}^{\beta X} \cap \overline{B}^{\beta X} = \emptyset$.

(e) βX es totalmente disconexo, es decir, los únicos subconjuntos conexos son los unipuntuales.

Demostración. (a) El embebimiento es el construido en el teorema 2.2.4, con el que sabemos que X es subconjunto denso de βX.

(b) Notemos que $V(\{x\}) = \{\mathscr{F}_{\{x\}}\}$ pues los ultrafiltros que contienen algún conjunto finito son los ultrafiltros principales. Si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro sobre X tal que $\{\mathscr{U}\}$ es abierto en βX entonces $\{\mathscr{U}\} \cap X \neq \emptyset$ por la densidad de X, luego $\mathscr{U}$ es ultrafiltro principal.

(c) Hemos visto antes que $\beta X \setminus V(X \setminus E) = V(E)$, de modo que los $V(E)$ tambien son cerrados.

(d) Dado $E \subseteq X$, la afirmación $\mathscr{U} \in \overline{E}^{\beta X}$ es equivalente a que para cada $A \in \mathscr{U}$ sea $V(A) \cap E \neq \emptyset$, es decir, $E \cap A \neq \emptyset$ para cada $A \in \mathscr{U}$. La proposición 1.1.14 nos dice que ésto es equivalente a afirmar $E \in \mathscr{U}$, es decir, $\mathscr{U} \in V(E)$.
La segunda afirmación, aunque era una propiedad genérica de βX para cualquier espacio completamente regular X (ver teorema 2.3.10), se puede probar en este caso de manera directa teniendo en cuenta que $\overline{A}^{\beta X} \cap \overline{B}^{\beta X}$ coincide con $V(A) \cap V(B) = V(A \cap B) = V(\emptyset) = \emptyset$.

(e) Si A es un conjunto que contiene al menos dos ultrafiltros $\mathscr{U}_1 \neq \mathscr{U}_2$ entonces existe $E \subseteq X$ tal que $E \in \mathscr{U}_1$ y $(X \setminus E) \in \mathscr{U}_2$. De este modo,

$$A = (V(E) \cap A) \cup (V(X \setminus E) \cap A)$$

es una separación de A, pues $\mathscr{U}_1 \in (V(E) \cap A)$ y $\mathscr{U}_2 \in (V(X \setminus E) \cap A)$.

$\square$

Proposición 2.5.2. *Si $f : X \to K$ es una aplicación continua con K compacto Hausdorff entonces existe una única extensión $f^\beta : \beta X \to K$ de f. Además f^β se caracteriza porque*

$$\{f^\beta(\mathscr{U})\} = \bigcap_{E \in \mathscr{U}} \overline{f[E]}.$$

Demostración. La existencia y unicidad de la extensión es consecuencia del teorema 2.3.12. La última afirmación aparece en la demostración de la implicación 3) $\Rightarrow$ 1) de la proposición 2.2.6. $\square$

Corolario 2.5.3. *Sea $f : X \to \beta X$ una aplicación continua cuya única extensión continua a βX es $f^\beta : \beta X \to \beta X$. Si $\mathscr{U} \in \beta X$ entonces $f^\beta(\mathscr{U})$ es el ultrafiltro generado por la base de ultrafiltro $\{f[E] : E \in \mathscr{U}\}$.*

Demostración. Sabemos que $\{f[E] : E \in \mathscr{U}\}$ es una base de un ultrafiltro por la proposición 1.2.3. La proposición anterior afirma que $\tilde{f}(\mathscr{U})$ es el único elemento de

$$\bigcap_{E \in \mathscr{U}} \overline{f[E]}^{\beta X} = \bigcap_{E \in \mathscr{U}} V(f[E]) = \bigcap_{B \in f[\mathscr{U}]} V(B).$$

Por tanto, $f[\mathscr{U}] \subseteq \tilde{f}(\mathscr{U})$, lo que termina la prueba. $\square$

Cardinal de βX

E. Čech usaba la cardinalidad de $\beta\mathbb{N}$ en un artículo de 1937 para estimar el cardinal de ciertos subespacios de las compactificaciones de Stone-Čech. Sin embargo, no llegó a calcular explícitamente el cardinal, sino que solamente estimó que debía estar comprendido entre $\mathfrak{c}$ y $2^{\mathfrak{c}}$, aunque subrayaba la importancia de saber cuál era el valor exacto. Ese mismo año B. Pospíšil demostró que un conjunto de cardinalidad κ posee 2^{2^κ} ultrafiltros. Damos las siguientes pruebas siguiendo [76].

Lema 2.5.4. *κ posee una familia de subconjuntos $\mathscr{A}$ con $|\mathscr{A}| = 2^\kappa$ y tal que*

$$u_1 \cap \ldots \cap u_n \cap (\kappa \setminus v_1) \cap \ldots \cap (\kappa \setminus v_m)$$

tiene cardinalidad κ para cada colección finita de elementos distintos $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m \in \mathscr{A}$ (una tal familia se suele denominar independiente*).*

Demostración. Sea P la familia de todos los pares $(F, \mathscr{F})$ donde F es un subconjunto finito de κ y $\mathscr{F}$ es una familia finita de subconjuntos finitos de κ. Notemos que el cardinal del conjunto de los subconjuntos finitos de κ tiene cardinalidad menor que $|\bigcup_{n\in\omega} \kappa^n| \leq \omega \cdot \kappa = \kappa$ (ω es el primer cardinal infinito), razón que también muestra que la colección de todos los $\mathscr{F}$ anteriores tiene cardinal κ. Por tanto, la cardinalidad de P es precisamente κ, luego para probar el lema basta ver que podemos encontrar en P una familia como la del enunciado.

Para cada $u \subseteq \kappa$ defininamos $P_u = \{(F, \mathscr{F}) \in P : F \cap u \in \mathscr{F}\}$ y consideremos la familia $\mathscr{A} = \{P_u : u \subseteq \kappa\}$. Vamos a ver que esta familia verifica las condiciones que queremos.

- $\mathscr{A}$ tiene cardinalidad 2^κ: Notemos que si $u \neq v$ son subconjuntos de κ entonces existe (intercambiando los papeles de u y v si es necesario) un elemento $y \in u \setminus v$. Dicho elemento verifica que el par $(\{y\}, \{\{y\}\})$ pertenece a P_u pero no a P_v. En otras palabras, la correspondencia $u \mapsto P_u$ es biyectiva luego $|\mathscr{A}| = |\mathscr{P}(\kappa)| = 2^\kappa$.
- $\mathscr{A}$ es una familia independiente: Supongamos que $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ son subconjuntos distintos de κ. Para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$ existe $\alpha_{i,j}$ que pertenece a $u_i \setminus v_j$ o bien a $v_j \setminus u_i$.

  Cualquier subconjunto finito F de κ con $F \supseteq \{\alpha_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ verifica que $F \cap u_i \neq F \cap v_j$ para todo i, j por la elección de los $\alpha_{i,j}$. Llamando $\mathscr{F} = \{F \cap u_i : 1 \leq i \leq n\}$ tenemos que $(F, \mathscr{F}) \in P_{u_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ pero $(F, \mathscr{F}) \notin P_{v_j}$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, es decir, $(F, \mathscr{F})$ pertenece a

  $$P_{u_1} \cap \ldots \cap P_{u_n} \cap (P \setminus P_{v_1}) \cap \ldots \cap (P \setminus P_{v_m}) \neq \emptyset.$$

  Notemos que hay κ conjuntos distintos F como antes, luego el cardinal de la intersección anterior es al menos κ; pero éste es también el máximo valor que puede tomar pues hemos visto antes que $|P| = \kappa$.

□

Proposición 2.5.5. *Existen 2^{2^κ} ultrafiltros sobre κ.*

Demostración. Como κ tiene 2^κ subconjuntos y los ultrafiltros son elementos de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\kappa))$ deducimos que existen a lo sumo 2^{2^κ} ultrafiltros.

Por otro lado, fijemos una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de κ como en el lema anterior. Para cada función $f : \mathscr{A} \to \{0, 1\} = 2$ consideramos la familia

$$\mathscr{G}_f = \{u \in \mathscr{A} : f(u) = 1\} \cup \{\kappa \setminus u : f(u) = 0\}.$$

El lema anterior garantiza que $\mathscr{G}_f$ verifica que cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía (de hecho la intersección tiene cardinalidad κ), de modo que existe un ultrafiltro $\mathscr{U}_f$ que contiene a $\mathscr{G}_f$. Además funciones distintas f_1 y f_2 generan ultrafiltros distintos, ya que existirá $u \in \mathscr{A}$ tal que $f_1(u) = 1$ ($u \in \mathscr{U}_{f_1}$) y $f_2(u) = 0$ ($\kappa \setminus u \in \mathscr{U}_{f_2}$). Como hay $2^{|\mathscr{A}|} = 2^{2^\kappa}$ funciones distintas se deduce el resultado. □

Corolario 2.5.6. *Si X es un espacio discreto de cardinalidad κ entonces βX tiene cardinalidad 2^{2^κ}.*

El espacio $\beta\mathbb{N}$

La compactificación $\beta\mathbb{N}$ del espacio discreto de los naturales es un objeto de gran interés en matemáticas, ya sea en topología, teoría de conjuntos, análisis funcional o teoría de númeors. A continuación recogemos algunas propiedades y aplicaciones que nos resultan llamativas.

Aunque $\beta\mathbb{N}$ es separable ($\mathbb{N}$ es subconjunto denso de puntos aislados), el subespacio $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ no lo es. En efecto, por el lema 2.5.4 sabemos que existe una familia $\mathscr{C}$ de $\mathfrak{c}$ subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ casi-disjuntos. De este modo, si $A, B \in \mathscr{C}$ son elementos distintos entonces $V(A) \cap V(B) = V(A \cap B)$ sólo contiene ultrafiltros principales al ser $A \cap B$ finito, luego $V(A) \setminus \mathbb{N}$ y $V(B) \setminus \mathbb{N}$ son abiertos en $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ disjuntos. Como cada $A \in \mathscr{C}$ es infinito tenemos que cada $V(A) \setminus \mathbb{N}$ es no vacío. De este modo $\{V(A) \setminus \mathbb{N} : A \in \mathscr{C}\}$ es una familia de $\mathfrak{c}$ abiertos no vacíos disjuntos. Por tanto cualquier subconjunto denso tiene al menos $\mathfrak{c}$ elementos. Se puede probar que, de hecho, $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ tiene una base de abiertos de esta cardinalidad (ver [31, theorem 3.6.11, p. 174]).

Entre las propiedades de $\beta\mathbb{N}$ destaca el hecho de que cualquier subconjunto cerrado infinito $F \subseteq \beta\mathbb{N}$ contiene una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$ (ver [31, theorem 3.6.14, p. 175]). En particular se deduce que toda sucesión convergente se hace constante a partir de un cierto término, ya que si α es límite de una sucesión con infinitos términos distintos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\beta\mathbb{N}$ entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha\}$ tendría una copia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$, cuyo cardinal ya sabemos es $2^\mathfrak{c}$, lo que es absurdo.

Otro destacado teorema (ver [31]) en el que interviene $\beta\mathbb{N}$ es el siguiente: *el hecho de que todo espacio de Parovičenko de peso $\mathfrak{c}$ sea homeomorfo a $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ es equivalente a la hipótesis del continuo*. Un espacio de Parovičenko es un espacio compacto que verifica las siguientes propiedades: no tiene puntos aislados, posee una base de conjuntos clopen, dados dos elementos disjuntos que son F_σ (unión numerable de cerrados) se tiene que sus clausuras también son disjuntas y todo conjunto G_δ (intersección numerable de abiertos) tiene interior no vacío.

En [69] Rudin estudió el problema de la homogeneidad de $\beta\mathbb{N}$ y $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Un espacio topológico se dice que es *homogéneo* si dados dos elementos suyos cualesquiera existe un homemomorfismo de dicho espacio en sí mismo que lleva uno a otro. Rudin caracteriza en el caso de $\beta\mathbb{N}$ aquellos pares de ultrafiltros $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \beta\mathbb{N}$ para los que existe un homeomorfismo de $\beta\mathbb{N}$ en sí mismo que lleva uno a otro (a los que denomina *ultrafiltros del mismo tipo*), identificando de manera natural todos los homeomorfismos de $\beta\mathbb{N}$ con permutaciones de $\mathbb{N}$. Respecto al caso de $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, Rudin prueba que bajo la hipótesis del continuo dicho espacio posee elementos que son P-puntos (un elemento de un espacio topológico se dice que es un *P-punto* si la intersección de una familia numerable de entornos de dicho punto es de nuevo un entorno del punto) así como elementos que no lo son. Como la imagen a través de una aplicación continua de un P-punto es también P-punto, entonces Rudin deduce que no pueden existir homeomorfismos que lleven un P-punto a un no P-punto, es decir, $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ no es homogéneo.

El espacio $\beta\mathbb{N}$ admite una operación de adición $+$ con la que $(\beta\mathbb{N},+)$ es un semigrupo topológico por la izquierda [72, lemma 1, lemma 2, p. 67-68]. Como además es compacto y Hausdorff, un teorema de Auslander-Ellis [72, lemma 3, p. 69] garantiza que dicho semigrupo posee un elemento idempotente $\mathscr{U}$. Usando este elemento se puede probar el siguiente teorema debido a Hindman [72, p. 69]: *si el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ se particiona en un número finito de conjuntos, es posible encontrar uno de ellos, pongamos A y un subconjunto infinito B de A, con la propiedad de que cualquier suma finita de elementos de B pertenece a A*. Con un poco más de trabajo, pero siguiendo la misma idea, se prueba también el siguiente teorema de Van der Waerden [72, p. 73]: *si el conjunto de números $\mathbb{N}$ se particiona en un número finito de conjuntos $A_1,\ldots,A_n$, es posible encontrar uno de ellos, pongamos A_i que contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes*.

Hemos visto al hablar del problema de homogeneidad que el comportamiento y las propiedades de $\beta\mathbb{N}$ están afectadas por el modelo de teoría de conjuntos en el que estemos trabajando. Este comportamiento es lo que lleva a Jan van Mill [51] a referirse a $\beta\mathbb{N}$ como “el monstruo de tres cabezas” (*a monster having three heads*): *if one works in a model in which the Continuum Hypothesis (abbreviated CH) holds, then one will see only the first head. This head is smiling, friendly and makes you feel comfortable working with $\beta\mathbb{N}$ ...If one works in a model in which CH does not hold, then one will see the second head of $\beta\mathbb{N}$. This head constantly tries to confuse you and you will never be able to decide whether it speaks the truth ...The third head of $\beta\mathbb{N}$ is its head in ZFC. Because of the first two heads, this head is rather vague, but some parts of it are very clear. If one wants to see the clear part, one will have to work like a slave, inventing ingenious combinatorial arguments.*

Capítulo 3

Límites a través de filtros

En la primera sección vamos a definir el concepto de punto límite de una aplicación $f : I \to X$ (X espacio topológico) a través de una base de filtro β sobre I. El conjunto de tales puntos lo denotaremos por $\text{lím}_\beta f$. Se trata de un concepto que está ligado al de límite de una base de filtro así como con la extensión de f a βI visto I como espacio topológico discreto. Establecida esta conexión, deduciremos las principales propiedades asociadas, en particular la existencia de tal límite a través de un ultrafiltro $\mathscr{U}$ cuando la función f tiene su imagen $f[I]$ contenida en un subconjunto compacto K de X. Éste es posiblemente uno de los hechos más importantes de la memoria, y tendrá su aplicación en el capítulo siguiente de estabilidad de espacios de Banach, así como en los dos últimos apéndices de esta memoria.

En la sección siguiente, partiendo de un espacio de Banach dual $(E^*, \|\cdot\|)$ construiremos la aplicación $T_\mathscr{U}$ definida sobre el conjunto $\ell_\infty(I, E^*)$ y con valores en E^* dada por $T_\mathscr{U}(f) = \omega^*\text{-lím}_\mathscr{U} f$. Veremos que este tipo de aplicaciones son lineales, continuas (en norma) y multiplicativas en el caso en que E^* sea un álgebra de Banach. En el caso en que $E^* = \mathbb{R}$ demostraremos que dichas propiedades caracterizan todos los funcionales de $\ell_\infty(I, \mathbb{R})$ que son de la forma $T_\mathscr{U}$ para un ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre I. Señalar que todas las propiedades y resultados anteriores han sido probados sin recurrir a resultados en literatura previa.

Como aplicación de lo anterior probaremos un reciente resultado [8] sobre la existencia de límites de Banach con valores vectoriales en todo espacio de Banach 1-complementado, esto es, un espacio de Banach E que admite una proyección $p : E^{**} \to E$ de norma 1. También pondremos de manifiesto que existen espacios de Banach sin límites de Banach, como por ejemplo $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Discutiremos la relación entre límites de Banach y límites a través de ultrafiltros, dedicando una sección a probar un teorema de Jerison [47] que garantiza que todo límite de Banach se puede obtener aproximando con combinaciones convexas de límites de Banach que sí se expresan como límites a través de ultrafiltros. Es interesante remarcar que este resultado se prueba utilizando el teorema de Riesz y el teorema ergódico de Birkhoff, y haciendo uso de la compactificación de Stone-Čech de los naturales $\beta\mathbb{N}$.

La última sección la dedicaremos a introducir los ultraproductos de espacios de Banach, que serán de ultilidad para el capítulo siguiente en la construcción del *spreading model*. Señalar que para la preparación de esta sección se han seguido unos apuntes de un curso impartido por el profesor José Bonet (Universidad Politécnica de Valencia).

Las principales referencias para el capítulo son: [8], [47].

3.1. Límites a través de filtros

Sea β una base de filtro sobre un conjunto no vacío I, X un espacio topológico y $f : I \to X$ una aplicación.

Definición 3.1.1. *Diremos que $x \in X$ es un* punto límite de f a través de la base de filtro β *si la base de filtro $f[\beta]$ converge hacia x, i.e., para cada $V \in \mathrm{Ent}(x)$ existe $B \in \beta$ con $f[B] \subseteq V$.*

El conjunto de puntos límite de f a través de β lo denotaremos por

$$\lim_{\beta} f.$$

En ocasiones las funciones $f : I \to X$ se escriben como $(x_i)_{i \in I}$ donde $x_i = f(i)$ para cada $i \in I$. En ese caso el conjunto de puntos límite se denota por $\lim_{i,\beta} x_i$.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que el conjunto de puntos límite de una función a través de una base de filtro puede ser vacío.

Ejemplo 3.1.2. *Sea $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ dada por $f(n) = 1/n$ y $\mathscr{F}$ el filtro de Fréchet. Para cualquier punto $x_0 \in (0,1)$ el entorno $(x_0/2, 1)$ de x_0 verifica que*

$$\{n \in \mathbb{N} : f(n) \in (x_0/2, 1)\}$$

es finito, de modo que no pertenece a $\mathscr{F}$.

Vamos a ver dos casos particulares de límite de aplicación a través de filtro que generalizan conceptos que usualmente aparecen en espacios métricos. Supongamos que $f : Y \to X$ es una aplicación entre espacios topológicos.

- Sea $\beta = \mathrm{Ent}(c)$ el filtro de entornos de $c \in Y$. Si $x \in X$ es un punto límite de f respecto de $\mathrm{Ent}(c)$ esto significa que dado un entorno V de x existe $U \in \mathrm{Ent}(c)$ tal que $f[U] \subseteq V$. En este caso se suele escribir
$$x \in \lim_{y \to c} f(y).$$
Notar que f es continua en c si y sólo si $f(c) \in \lim_{y \to c} f(y)$.
- Si $\{c\}$ no es un conjunto abierto de X (i.e. c no es un punto aislado de X) entonces
$$\beta = \{V \setminus \{c\} : V \in \mathrm{Ent}(c)\}$$
es una base de filtro sobre X. En efecto, se trata de una familia no vacía pues al menos contiene a $X \setminus \{c\}$, es cerrada para intersecciones y es obvio que no contiene el conjunto vacío. Si x es límite de f con respecto a la base de filtro β anterior se suele escribir
$$x \in \lim_{y \to c, y \neq c} f(y).$$

El siguiente teorema recoge algunas de las propiedades más importantes de los límites a través de una base de filtro.

Teorema 3.1.3. *Con la notación de la definición anterior se tienen las siguientes propiedades:*

(a) $\lim_{\beta} f \subseteq \overline{f[I]}$.
(b) *Sean* β, β' *dos bases de filtro sobre* I *tales que* $\beta \subseteq \langle \beta' \rangle$. *Entonces* $\lim_{\beta} f \subseteq \lim_{\beta'} f$.
(c) *Si* $g : X \to Y$ *es una aplicación continua entre espacios topológicos y entonces* $g[\lim_{\beta} f] \subseteq \lim_{\beta} (g \circ f)$.
(d) *Si* X *es Hausdorff entonces* f *tiene a lo sumo un punto límite a través de* β. *Cuando dicho punto exista se dirá que es* el límite de f respecto de β *y se denotará por* $\lim_{\beta} f$.
(e) $x \in \lim_{\beta} f$ *si y sólo si para cada ultrafiltro* $\mathscr{U}$ *mas fino que* β *tenemos que* $x \in \lim_{\mathscr{U}} f$.

Demostración. (a) Sea x límite de f a través de la base de filtro β y $V \in \mathrm{Ent}(x)$ un entorno de x. Existe $B \in \beta$ tal que $f[B] \subseteq V$, de modo que

$$f[I] \cap V \supseteq f[B] \cap V \neq \emptyset.$$

(b) Basta usar que dado $B \in \beta$ existe $B' \in \beta'$ tal que $B' \subseteq B$.
(c) Si $g : X \to Y$ es una aplicación continua y $x \in \lim_{\beta} f$ entonces para cada entorno de W de $g(x)$ se tiene que $g^{-1}[W]$ es entorno de x. Por tanto, existe $B \in \beta$ tal que $B \subseteq f^{-1}[g^{-1}[W]] = (g \circ f)^{-1}[W]$.
(d) Es consecuencia de (c) y la proposición 1.1.25. Se puede ver también de manera directa: si V_1 y V_2 son entornos disjuntos de dos límites de f a través de β entonces $f^{-1}[V_1], f^{-1}[V_2]$ son dos elementos disjuntos que pertenecen al filtro $\langle \beta \rangle$, lo que es absurdo.
(e) Por el apartado (b) tenemos que si x es límite de f a través de β entonces también lo es a través de cualquier ultrafiltro $\mathscr{U}$ más fino que β. Para ver el recíproco, si suponemos que x no pertenece a $\lim_{\beta} f$ entonces existe un entorno abierto V de x tal que $B \cap f^{-1}[X \setminus V] \neq \emptyset$ para cada $B \in \beta$. De este modo $\beta \cup \{f^{-1}[X \setminus V]\}$ está contenido en un filtro, y por tanto, en un ultrafiltro $\mathscr{V}$ más fino que β. Por hipótesis $x \in \lim_{\mathscr{V}} f$, de manera que existe $A \in \mathscr{V}$ con $A \subseteq f^{-1}[V]$, el cual tendrá intersección no vacía con $f^{-1}[X \setminus V]$ pues ambos son elementos de $\mathscr{V}$, lo cual es absurdo.

□

Teorema 3.1.4. *Sea* $f : I \to X$ *una aplicación con valores en un espacio topológico* X. *Si* $\mathscr{U}$ *es un ultrafiltro sobre* I *y* $f[I] \subseteq K$ *para algún subconjunto compacto* K *de* X, *entonces* $\lim_{\mathscr{U}} f \neq \emptyset$.

Demostración. Por la proposición 1.2.3 sabemos que $f[\mathscr{U}]$ es una base de ultrafiltro tanto en X como en K. Ahora bien, el teorema 1.2.9 garantiza que dicha base de ultrafiltro debe ser convergente en K (con la topología inducida). Pero si es convergente como base de ultrafiltro en K, entonces también es convergente al mismo límite como base de ultrafiltro en X. □

Proposición 3.1.5. *Sea* $f : Y \to K$ *una aplicación entre un conjunto* Y *equipado con la topología discreta y un espacio topológico Hausdorff compacto* K. *Si* $f^{\beta} : \beta Y \to K$ *es la (única) extensión* *de f a βY entonces para cada ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre Y se verifica*

$$\lim_{\mathscr{U}} f = f^{\beta}(\mathscr{U}) \in \bigcap_{A\in\mathscr{U}} \overline{f[A]}.$$

Demostración. El hecho de que $f^{\beta}(\mathscr{U}) \in \bigcap_{A\in\mathscr{U}} \overline{f[A]}$ ya aparece en el corolario 2.5.2. En otras palabras, $f^{\beta}(\mathscr{U})$ es un punto de adherencia de la base de ultrafiltro $f[\mathscr{U}]$, es decir, $\lim_{\mathscr{U}} f = f^{\beta}(\mathscr{U})$. □

El límite usual de sucesiones que manejamos en matemáticas es un caso particular de la definición de límite a través de filtro cuando consideramos el filtro $\mathscr{F}_{cf}$ de Fréchet sobre $\mathbb{N}$. En efecto, sabemos que una base de $\mathscr{F}_{cf}$ viene dada por $\beta = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$V_n = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}.$$

De este modo, $\lim_{n,\mathscr{F}_{cf}} x_n = \alpha$ se traduce en que para cada $V \in \mathrm{Ent}(\alpha)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m$ implica $x_n \in V$.

Sea $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to K$ una sucesión en un compacto Hausdorff K, y $\mathbf{x}^{\beta} : \beta\mathbb{N} \to K$ la única extensión continua de $\mathbf{x}$. De la proposición 3.1.5 se sigue que para cada ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre $\mathbb{N}$ se tiene

$$\lim_{n,\mathscr{U}} x_n = \mathbf{x}^{\beta}(\mathscr{U}) \in \bigcap_{A\in\mathscr{U}} \overline{\mathbf{x}[A]}.$$

Si $\mathscr{U}$ es ultrafiltro no principal (o libre) entonces es más fino que el filtro de Fréchet, luego en particular

$$\lim_{n,\mathscr{U}} x_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k : k \geq n\}},$$

es decir, el límite a través de $\mathscr{U}$ es un punto de aglomeración de la sucesión. Esta propiedad muestra que para una sucesión de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que

$$\liminf_{n} x_n \leq \lim_{n,\mathscr{U}} x_n \leq \limsup_{n} x_n. \tag{3.1}$$

3.1.1. Límite a través de ultrafiltro en Banach duales

Para un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ y un conjunto I denotaremos por $\ell_\infty(I,E)$ al conjunto de todas las aplicaciones $f : I \to E$ cuyo rango es un subconjunto acotado de E. Dicho conjunto se puede dotar la norma del supremo $\|f\|_\infty = \sup\{|f(i)| : i \in I\}$.

Definición 3.1.6. *Sea E^* un espacio de Banach dual y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro no principal sobre I. Denotaremos por $T_{\mathscr{U}} : \ell_\infty(I,E^*) \to E^*$ a la aplicación dada por*

$$T_{\mathscr{U}}(f) = \omega^*\text{-}\lim_{\mathscr{U}} f \quad \textit{(límite en } \omega^*\textit{)}.$$

Notemos que está bien definida por el apartado (d) del teorema 3.1.3, ya que los conjuntos acotados (en norma) son relativamente ω^*-compactos por el teorema de Alaoglu [32, teorema 3.21, p. 71].

Proposición 3.1.7. *Sea $\mathscr{U}$ ultrafiltro no principal sobre un conjunto I.*

(a) $T_{\mathscr{U}}$ es una aplicación lineal y $\|\cdot\|_\infty$-$\|\cdot\|$-continua con $\|T_{\mathscr{U}}\| = 1$.

(b) Si E^* es un álgebra de Banach entonces para cualesquiera $(x_i^*)_{i\in I}, (y_i^*)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,E^*)$ se tiene que $T((x_i^*)_{i\in I} \cdot (y_i^*)_{i\in I}) = T((x_i^*)_{i\in I}) \cdot T((y_i^*)_{i\in I})$.

Demostración. Sean $(x_i^*)_{i\in I}, (y_i^*)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,E)$, $x^* = \omega^*\text{-}\lim_{\mathscr{U}} x_i^*$ e $y^* = \omega^*\text{-}\lim_{\mathscr{U}} y_i^*$.

(a) Comenzamos viendo que se trata de una aplicación lineal. Dado un ω^*-abierto $H = \{z^* \in E^* : z^*(t) > \alpha\}$ que contiene a x^*+y^*, fijamos $\varepsilon > 0$ con $x^*(t)+y^*(t)-\varepsilon > \alpha$ y los conjuntos

$$H_1 = \{z^* \in E^* : z^*(t) > x^*(t) - \varepsilon/2\}, \quad H_2 = \{z^* \in E^* : z^*(t) > y^*(t) - \varepsilon/2\}$$

que son entornos ω^*-abiertos de x^*, y^* respectivamente. Entonces

$$\{i \in I : x_i^* + y_i^* \in H\} \supseteq \{i \in I : x_i^* \in H_1\} \cap \{i \in I : y_i^* \in H_2\} \in \mathscr{U}.$$

Si W es un ω^*-abierto arbitrario que contiene a x^*+y^* entonces es intersección finita de semiespacios ω^*-abiertos que contienen a x^*+y^*. El razonamiento anterior prueba que para cada uno de esos semiespacios H se tiene que $\{i \in I : x_i^* + y_i^* \in H\} \in \mathscr{U}$, luego tomando la intersección finita de todos ellos se deduce $\{i \in I : (x_i^* + y_i^*) \in W\} \in \mathscr{U}$. Ésto prueba que $T_{\mathscr{U}}((x_i^*)_{i\in I} + (y_i^*)_{i\in I}) = x^*+y^* = T_{\mathscr{U}}((x_i^*)_{i\in I}) + T_{\mathscr{U}}((y_i^*)_{i\in I})$. Para probar que $T_{\mathscr{U}}(\lambda(x_i^*)_{i\in I}) = \lambda T_{\mathscr{U}}((x_i^*)_{i\in I})$ se razona de manera análoga.

Para ver la continuidad basta observar que $f[I] \subseteq \|f\|_\infty B_{E^*}$ implica $\lim_{\mathscr{U}} f \in \|f\|_\infty B_{E^*}$ por el teorema 3.1.3 (la bola unidad de un dual es ω^*-compacta). Así pues, $\|T_{\mathscr{U}}\| \leq 1$. De hecho es una igualdad, pues fijado $y \in E$ con $\|y\| = 1$ podemos definir $y_i := y$ para cada $i \in I$. Obviamente $\omega^*\text{-}\lim y_i = y$.

(b) Se razona igual que para probar la linealidad. Dado un semiespacio ω^*-abierto $H = \{z^* \in E^* : z^*(t) > \alpha\}$ que contiene a $x^* \cdot y^*$, consideramos $\varepsilon > 0$ con $x^*(t) \cdot y^*(t) - \varepsilon > \alpha$ y los abiertos

$$H_1 = \{z^* \in E^* : |z^*(t) - x^*(t)| < \frac{\varepsilon}{2\|(y_i^*)_{i\in I}\|_\infty (1+|t|)}\},$$
$$H_2 = \{z^* \in E^* : |z^*(t) y^*(t)| < \frac{\varepsilon}{2\|(x_i^*)_{i\in I}\|_\infty (1+|t|)}\}.$$

Entonces

$$\{i \in I : (x_i^* \cdot y_i^*) \in H\} \supseteq \{i \in I : x_i^* \in H_1\} \cap \{i \in I : y_i^* \in H_2\} \in \mathscr{U},$$

ya que si $x_i^* \in H_1$ e $y_i^* \in H_2$ entonces

$$\begin{aligned}|x_i^*(t) \cdot y_i^*(t) - x^*(t) \cdot y^*(t)| &\leq \|(x_i^*)_{i\in I}\|_\infty |t| |y_i^*(t) - y^*(t)| + \|y^*\| |t| |x_i^*(t) - x^*(t)| \\ &\leq \|(x_i^*)_{i\in I}\|_\infty |t| |y_i^*(t) - y^*(t)| + \|(y_i^*)_{i\in I}\|_\infty |t| |x_i^*(t) - x^*(t)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

lo que implica

$$x_i^*(t) \cdot y_i^*(t) \geq x^*(t) \cdot y^*(t) - \varepsilon > \alpha.$$

Si W es un ω^*-abierto arbitrario que contiene a $x^* \cdot y^*$ entonces es intersección finita de semiespacios ω^*-abiertos como H y razonando como en (a) se obtiene lo que buscamos. □

Límites a través de ultrafiltros en $\mathbb{R}$

Como caso particular, si $E = \mathbb{R}$ entonces las aplicaciones $T_{\mathscr{U}} : \ell_\infty(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ inducidas por un ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre I son lineales y $\|\cdot\|_\infty$-$\|\cdot\|$-continuas. Se trata entonces de elementos de $(\ell_\infty(I,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)^*$. En el caso en que $I = \mathbb{N}$ y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$, remarcamos el hecho de que la aplicación $T_{\mathscr{U}} : \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ selecciona un punto de aglomeración $T_{\mathscr{U}}(\mathbf{x})$ de cada sucesión $\mathbf{x} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ de manera que esta selección es lineal, continua y multiplicativa.

Si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro sobre I entonces podemos contruir una aplicación $\lambda_{\mathscr{U}} : \mathscr{P}(I) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda_{\mathscr{U}}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \mathscr{U} \\ 0 & \text{si } A \notin \mathscr{U} \end{cases}$$

Diremos que una aplicación $\lambda : \mathscr{P}(I)$ es finitamente aditiva si $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ siempre que A y B son disjuntos.

Proposición 3.1.8. *Para cada ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre I, la aplicación $\lambda_{\mathscr{U}} : \mathscr{P}(I) \to \mathbb{R}$ es finitamente aditiva con $\lambda(I) = 1$. Recíprocamente, si $\lambda : \mathscr{P}(I) \to \mathbb{R}$ es finitamente aditiva $\{0,1\}$-valuada no nula entonces existe un único ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre I tal que $\lambda_{\mathscr{U}} = \lambda$.*

Demostración. Se trata efectivamente de una medida finitamente aditiva de probabilidad ya que $\lambda(\emptyset) = 0$ y si $(A_i)_{i=1}^n$ es una familia finita de subconjuntos disjuntos de I entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{U}$ si y sólo si existe un único A_{i_0} tal que $A_{i_0} \in \mathscr{U}$ (la existencia es consecuencia de las propiedades de los ultrafiltros y la unicidad porque dos elementos de un ultrafiltro tienen intersección no vacía).

Supongamos ahora que $\lambda : \mathscr{P}(I) \to \mathbb{R}$ es finitamente aditiva $\{0,1\}$-valuada y no nula. Si existe tal ultrafiltro $\mathscr{U}$ entonces debe estar definido como $\mathscr{U} = \{A \subseteq I : \lambda(A) = 1\}$. Veamos que efectivamente se trata de un ultrafiltro. Como λ es monótona entonces se verifica que si $A \subseteq B$ y $A \in \mathscr{U}$ entonces $B \in \mathscr{U}$. Obviamente $\mathscr{U}$ no contiene al conjunto vacío pues $\lambda(\emptyset) = \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset)$ implica $\lambda(\emptyset) = 0$, y si $A, B \in \mathscr{U}$ pero $A \cap B \notin \mathscr{U}$ entonces $1 \geq \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B) = 2$, lo que es absurdo. Finalmente se trata de un ultrafiltro ya que si $A \subseteq I$ entonces $1 = \lambda(I) = \lambda(A) + \lambda(I \setminus A)$, de donde alguno de los sumandos es igual a 1, es decir, A o bien su complementario $I \setminus A$ pertenece a $\mathscr{U}$. $\square$

El espacio $(\ell_\infty(I,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ tiene la propiedad de que si identificamos cada elemento $A \in \mathscr{P}(I)$ con $\chi_A \in \ell_\infty(I,\mathbb{R})$ entonces $\overline{\text{span}}(\mathscr{P}(I)) = \ell_\infty(I,\mathbb{R})$. En efecto, si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función acotada entonces su rango está contenido en un compacto, luego para cada $\varepsilon > 0$ podemos recubrir $f[I]$ con una familia finita de bolas de radio ε. Si $(a_k)_{k=1}^n$ es la familia de los centros de dichas bolas, entonces podemos construir una partición $(A_k)_{k=1}^n$ de I de manera que si $i \in A_k$ entonces $|f(i) - a_i| < \varepsilon$. De este modo, la función simple $S = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ verifica $\|f - S\|_\infty < \varepsilon$.

Proposición 3.1.9. *Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I. La aplicación $T_{\mathscr{U}} : \ell_\infty(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ verifica*

$$T_{\mathscr{U}}(\chi_A) = \lambda_{\mathscr{U}}(A) \text{ para cada } A \subseteq I.$$

Por tanto, $T_{\mathscr{U}}$ es la única extensión lineal y continua de la aplicación finitamente aditiva $\lambda_{\mathscr{U}} : \mathscr{P}(I) \to \mathbb{R}$.

Demostración. Para cada $A \subseteq I$ se tiene que $T_{\mathscr{U}}(\chi_A) \in \{0,1\}$ por el apartado (a) del teorema 3.1.3. Si $T_{\mathscr{U}}(\chi_A) = 1$ entonces tomando el abierto $(1/2,+\infty)$ tendríamos $A = \{i \in I : \chi_A(i) \in (1/2,\infty)\}$ pertenece a $\mathscr{U}$. De manera análoga que se prueba que $T_{\mathscr{U}}(\chi_A) = 0$ implica $I \setminus A \in \mathscr{U}$. De este modo, $T_{\mathscr{U}}(\chi_A) = \lambda_{\mathscr{U}}(A)$ para cada $A \in \mathscr{P}(I)$.

La última afirmación es consecuencia de que un funcional lineal y continuo $f : \ell_\infty(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ queda unívocamente determinado al conocer los valores sobre $\mathscr{P}(I)$, usando el hecho (probado antes) de que $\overline{\mathrm{span}}(\mathscr{P}(I)) = \ell_\infty(I,\mathbb{R})$. $\square$

El siguiente teorema da una caracterización de las aplicaciones límite a través de un ultrafiltro para este caso.

Teorema 3.1.10. *Una aplicación $f : \ell_\infty(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ no nula es de la forma $f = T_{\mathscr{U}}$ para un ultrafiltro $\mathscr{U}$ si y sólo si*

(a) f es lineal y continua.
(b) $f((x_i)_{i\in I}(y_i)_{i\in I}) = f((x_i)_{i\in I})f((y_i)_{i\in I})$.

Demostración. Ya sabemos que las condiciones (a) y (b) son necesarias por la proposición 3.1.7, veamos que también son suficientes. Basta comprobar que $\lambda : \mathscr{P}(I) \to \mathbb{R}$ dada por $\lambda(A) = T(\chi_A)$ es una medida de probabilidad finitamente aditiva $\{0,1\}$-valuada y no nula. Aplicando la proposición 3.1.8 tendremos que $\lambda = \lambda_{\mathscr{U}}$ para un ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre I, de modo que $T = T_{\mathscr{U}}$ por la proposición 3.1.9.

Para cada $A \subseteq I$ se verifica $f(\chi_A) = f(\chi_A)f(\chi_A)$ por la condición (b), de modo que $f(\chi_A) = 1$ o 0. Notar que $\lambda(I) = f(\chi_I) = 1$, ya que si fuera $f(\chi_I) = 0$, entonces para cada $(x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,\mathbb{R})$ tendríamos que $f((x_i)_{i\in I}) = f((x_i)_{i\in I})f(\chi_I) = 0$, de modo que f sería la aplicación nula contradiciendo las hipótesis. Por linealidad $\lambda(\emptyset) = f(\chi_\emptyset) = f(\mathbf{0}) = 0$. Si $(A_j)_{j=1}^m$ es una familia finita de elementos disjuntos de $\mathscr{P}(I)$ entonces

$$\lambda(\bigcup_{j=1}^m A_j) = T(\chi_{\cup_{j=1}^m A_j}) = \sum_{j=1}^m T(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^m \lambda(A_j)$$

por linealidad. $\square$

Observación 3.1.11. *La hipótesis de continuidad puede eliminarse de (a) ya que toda aplicación lineal y multiplicativa sobre un álgebra de Banach con unidad es continua (ver [79, theorem 8.3]).*

3.1.2. Límites de Banach

En 1932 Banach publica [10], donde estudia extender la aplicación *límite*, que asocia a cada sucesión real acotada convergente su límite, al espacio de todas las sucesiones reales acotadas. Este tipo de aplicaciones se recogen en la siguiente definición.

Definición 3.1.12. *Una aplicación lineal $L : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ se dice que es un* límite de Banach o límite generalizado *si verifica las siguientes propiedades:*

(a) Si $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente hacia α, entonces $L(\boldsymbol{x}) = \alpha$. En otras palabras, L extiende la aplicación límite.
(b) $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = L((x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$ para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada.
(c) Si $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ tiene sus términos no negativos entonces $L(\boldsymbol{x}) \geq 0$.

Estas aplicaciones son continuas (lo vemos a continuación) de modo que corresponden a elementos de ℓ_∞^* que extienden a la función lím : $c \to \mathbb{R}$. Obsevar que $L(\mathbf{1}) = 1$ por (a) (donde $\mathbf{1} = (1,1,...)$). Si $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$, entonces $\mathbf{1}-\mathbf{x}$ es una sucesión que tiene todos sus elementos no negativos, de donde se deduce que $0 \leq L(\mathbf{1}-\mathbf{x}) = L(\mathbf{1}) - L(\mathbf{x}) = 1 - L(\mathbf{x})$. Análogamente se comprueba que $L(\mathbf{x}) \geq -1$. De este modo se ha probado que $\|L\| = 1$, lo que en particular significa que se trata de aplicaciones continuas. De hecho, la condición (c) de la definición 3.1.12 se puede sustituir por $\|L\| \leq 1$. En efecto, supongamos que $\|L\| \leq 1$ y sea $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ una sucesión (que podemos suponer no nula) cuyos términos son no negativos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer (dividiendo por $\|\mathbf{x}\|_\infty$) que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq 1$. Entonces $\|(1-x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq 1$ y

$$1 = L(\mathbf{1}) = L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) + L(\mathbf{1} - (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) + 1.$$

Este hecho permite generalizar la definición de límite de Banach a espacios normados reales arbitrarios.

Denotamos por $\ell_\infty(E) := \ell_\infty(\mathbb{N}, E)$. Basándonos en [8, definición 1.2] introducimos la siguiente definición que extiende a la de límite de Banach usual.

Definición 3.1.13. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado real. Una aplicación $L : \ell_\infty(E) \to E$ se dice que es un* límite de Banach (generalizado) *si verifica las siguientes propiedades:*
(1) L es lineal y continua con $\|L\| \leq 1$.
(2) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión en E convergente a un cierto α entonces $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \alpha$.
(3) L es invariante por desplazamiento*, es decir, $T \circ S = T$ para el* operador desplazamiento *$S : \ell_\infty(E) \to \ell_\infty(E)$ que asocia $S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.*

La primera observación importante es que existen espacios de Banach que carecen de límites de Banach.

Ejemplo 3.1.14 ([8])**.** *El espacio c_0 carece de límites de Banach.*

Demostración. Supongamos que $T : \ell_\infty(c_0) \to c_0$ sea un límite de Banach. Definimos entonces el operador $G : \ell_\infty \to \ell_\infty$ dado por $G((x_n)_n) = T((x_1, 0, ...), (x_1, x_2, 0, ...), ...)$. Entonces G es una aplicación lineal con $\|G\| \leq 1$ pues $\|T\| \leq 1$. Como el rango de G está contenido en c_0, tenemos que G es una proyección de ℓ_∞ sobre c_0 que verifica $G|c_0 = id$, lo que no es posible por el lemma de Phillips ([1, teorema 2.5.5, p. 46]). □

Nos interesa estudiar qué espacios de Banach poseen límites de Banach. Primero vamos a ver que, en este sentido, la propiedad de invarianza con el operador desplazamiento es supérflua. El siguiente lema generaliza un resultado de [8].

Lema 3.1.15. *Sea $R : \ell_\infty(E) \to \ell_\infty(E)$ un operador lineal y continuo que satisface:*

1. *Si $\boldsymbol{x}$ converge hacia α entonces $R(\boldsymbol{x})$ converge hacia α.*
2. *Si $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica que existe $M > 0$ tal que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} x_n \right\| \leq M \text{ para cada } k \in \mathbb{N},$$

   entonces $R(\boldsymbol{x})$ converge hacia 0.

3. $\|R\| \leq 1$.

Si $L : \ell_\infty(E) \to \ell_\infty(E)$ satisface (1) y (2) de la definición 3.1.13 entonces $L \circ R$ verifica (1), (2) y (3), es decir, es un límite de Banach.

Demostración. $L \circ R$ es un operador lineal y continuo con $\|L \circ R\| \leq 1$ que claramente satisface la propiedad (2) de la definición 3.1.13. Para la propiedad (3) observemos que para cualquier sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada por $M > 0$ se tiene que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - S\mathbf{x} = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots),$$

tiene sumas parciales acotadas uniformemente

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} y_n \right\| = \|x_1 - x_{k+1}\| \leq 2M.$$

Por las propiedades de R deducimos que $R(\mathbf{x} - S\mathbf{x})$ converge a cero, luego $(T_{\mathscr{U}} \circ R)(\mathbf{x} - S\mathbf{x}) = 0$. Usando la linealidad concluimos que $T_{\mathscr{U}} \circ R$ es invariante por desplazamiento. □

Todo espacio de Banach E posee operadores R como en el lema anterior. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1.16. *Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente.*

1. $R(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ *(operador suma de Cesàro)*
2. $R(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{x_{g(1)} + x_{g(1)} + \ldots + x_{g(n)}}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $R(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k-1}}{k} \right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $R(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{x_{g(n)} + x_{g(n+1)} + \ldots + x_{g(n+k-1)}}{k} \right)_{n\in\mathbb{N}}$

Como consecuencia del lema anterior deducimos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.17. *Si E posee alguna aplicación $L : \ell_\infty(E) \to E$ satisfaciendo (1) y (2) de la definición 3.1.13 entonces existen límites de Banach en E.*

Demostración. Basta componer $L \circ R$ donde R es el operador suma de Cesàro y aplicar el lema 3.1.15. □

El corolario anterior nos dice que la existencia de límites de Banach en un espacio de Banach E es equivalente a la existencia de aplicaciones que satisfacen (1) y (2) de la definición de límite generalizado de Banach. Usando este hecho vamos a ver ahora que todo espacio dual posee límites de Banach.

Teorema 3.1.18 ([8])**.** *Todo espacio de Banach dual E^* posee límites de Banach.*

Demostración. Fijemos un ultrafiltro no principal arbitrario $\mathscr{U}$ y consideremos la aplicación $T_{\mathscr{U}} : \ell_\infty(E^*) \to E^*$. La proposición 3.1.7 muestra que $T_{\mathscr{U}}$ es lineal y continua con norma $\|T_{\mathscr{U}}\| = 1$. Si $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente (en norma) hacia y^* entonces converge también en la topología débil* al mismo límite, de modo que $T_{\mathscr{U}}((x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}) = y^*$. □

El teorema anterior se puede generalizar a espacios que admiten proyección del bidual en sí mismos.

Corolario 3.1.19 ([8])**.** *Si E es un espacio de Banach que admite una proyección $P : E^{**} \to E$ con $\|P\| = 1$ (espacio 1-complementado) entonces E posee límites de Banach.*

Demostración. Sabemos que E^{**} posee una aplicación $L : \ell_\infty(E^{**}) \to E^{**}$ que satisface las propiedades (1) y (2) de la definición de límite generalizado de Banach por el teorema anterior. Por otro lado, E admite un embebimiento natural en su bidual E^{**} asociando a cada $x \in E$ la aplicación lineal y continua $\langle x, \cdot\rangle : E^* \to E^*$ dada por $\langle x, f\rangle := f(x)$. Esta aplicación induce otro embebimiento $j : \ell_\infty(E) \to \ell_\infty(E^*)$, que es una aplicación lineal y continua con $\|j\| = 1$. Definimos ahora $L' = P \circ L \circ j : \ell_\infty(E) \to E$ y vamos a probar que también verifica las mismas dos propiedades que L. Se trata obviamente de una aplicación lineal y continua con norma $\|L'\| \leq 1$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E convergente a un cierto $x \in E$ entonces $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x$ (pues la norma bidual restringida a E coincide con la norma de E), luego $L'((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x$. En particular deducimos que $\|L'\| = 1$, ya que si $y \in E$ es un elemento de norma uno y consideramos la sucesión $\mathbf{y}$ constantemente igual a y entonces $L'(\mathbf{y}) = y$. □

Señalar que una aplicación $T_{\mathscr{U}} : \ell_\infty(E^*) \to E^*$ no puede ser un límite de Banach, ya que no conmuta con el operador desplazamiento S. En efecto, fijemos $y^* \in E^*$ un elemento con norma igual a uno y sea A el conjunto de los números impares. Entonces $y^*\chi_A$ es la sucesión que toma el valor y^* en los índices impares y cero en los pares, mientras que $S(y^*\chi_A)$ será la sucesión que toma el valor cero en los impares e y^* en los pares, es decir $S(y^*\chi_A) = y^*\chi_{\mathbb{N}\setminus A}$. De este modo, si $A \in \mathscr{U}$ entonces $T_{\mathscr{U}}(S(y^*\chi_A)) = 0$ pero $T_{\mathscr{U}}(y^*\chi_A) = y^*$, luego son distintos. En el caso $\mathbb{N}\setminus A \in \mathscr{U}$ los valores se intercambian y siguen siendo distintos.

Sin embargo, y como hemos visto en los resultados anteriores, basta componer $T_{\mathscr{U}} \circ R$ donde R es el operador suma de Cesàro para obtener un límite generalizado de Banach. Ahora la pregunta natural es: ¿puede todo límite de Banach escribirse de la forma $T_{\mathscr{U}} \circ R$ para el operador suma de Cesàro R?. El siguiente ejemplo es original, y pone de manifiesto que la respuesta a dicha afirmación es negativa.

Ejemplo 3.1.20. *Existen límites de Banach $L : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ que no se pueden escribir como $T_{\mathscr{U}} \circ R$ donde R es el operador suma de Cesàro.*

Demostración. Es fácil ver que

$$\operatorname{Im}(R) = \left\{ \mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty : \text{existe } M > 0 \text{ tal que si } n \in \mathbb{N} \text{ entonces } |y_{n+1} - y_n| \leq \frac{M}{n} \right\}.$$

El contenido $\subseteq$ es consecuencia de que si $\|\mathbf{x}\|_\infty = C$ entonces

$$\left| \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - \frac{x_1 + \ldots + x_{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{|x_1| + \ldots + |x_n| + n|x_{n+1}|}{n(n+1)} \leq \frac{2C}{n+1} \leq \frac{2C}{n}.$$

Para el recíproco, dado $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ perteneciente al conjunto de la derecha definimos $x_1 = y_1$, $x_{n+1} = (n+1)y_{n+1} - ny_n$ que verifica $\mathbf{x} \in \ell_\infty$ (pues $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq M + \|\mathbf{y}\|_\infty$) y $R(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Ahora es fácil ver que $\operatorname{Im}(R)$ es cerrado para el producto componente a componente, ya que

$$|x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty |y_{n+1} - y_n| + \|\mathbf{y}\|_\infty |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{M_1 \|\mathbf{x}\|_\infty + M_2 \|y\|_\infty}{n}.$$

Vamos a construir una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{Im}(R)$ con la propiedad de que existe una subsucesión $(a_n)_{n\in B}$ que converge hacia 0 y otra subsucesión $(a_n)_{n\in C}$ que converge hacia 1. Podemos suponer que B y C son disjuntos. Se toman ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$ verificando $B \in \mathscr{U}$ y $C \in \mathscr{V}$ (que serán necesariamente distintos) y consideramos

$$L = \left(\frac{T_{\mathscr{U}} + T_{\mathscr{V}}}{2} \right) \circ R = \frac{T_{\mathscr{U}} \circ R + T_{\mathscr{V}} \circ R}{2}.$$

Llamando $b_n = 1 - a_n$ tenemos que

$$T_{\mathscr{U}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1,\ T_{\mathscr{U}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0,\ T_{\mathscr{V}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0,\ T_{\mathscr{V}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1 \tag{3.2}$$

Si $L = T_{\mathscr{W}} \circ R$ para algún ultrafiltro $\mathscr{W}$ entonces $T_{\mathscr{W}}$ y $(T_{\mathscr{U}} + T_{\mathscr{V}})/2$ deben coincidir sobre $\operatorname{Im}(R)$, y como $T_{\mathscr{W}}$ es multiplicativa se deduce que los siguientes dos números deben coincidir

$$\left(\frac{T_{\mathscr{U}} + T_{\mathscr{V}}}{2} \right) ((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \frac{T_{\mathscr{U}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{U}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + T_{\mathscr{V}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{V}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_{\mathscr{U}} + T_{\mathscr{V}}}{2} \right) (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{T_{\mathscr{U}} + T_{\mathscr{V}}}{2} \right) (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &= \frac{T_{\mathscr{U}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{U}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + T_{\mathscr{U}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{V}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}{4} \\ &+ \frac{T_{\mathscr{V}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{U}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + T_{\mathscr{V}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{V}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}{4}. \end{aligned}$$

Igualando ambos términos y simplificando

$$T_{\mathscr{U}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{U}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + T_{\mathscr{V}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{V}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = T_{\mathscr{U}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{V}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + T_{\mathscr{V}}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} T_{\mathscr{U}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Sustituyendo los valores de (3.2) se llega a la igualdad $0 = 1$.

Sólo resta construir una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con las propiedades citadas. Vamos a construir una sucesión oscilatoria en el intervalo cerrado $[0,1]$ que se va acercando a 0 y 1 tanto como queramos: partiendo de $a_1 = 0$ y de forma recurrente vamos definiendo $a_{n+1} = a_n + 1/n$ hasta que llegue un momento n_0 para el que $a_0 \leq 1 < a_{n_0} + 1/n_0$. En ese momento cambiamos el signo y vamos decreciendo según $a_{n+1} = a_n - 1/n$ hasta llegar a un punto n_1 para el que $a_{n_1} - 1/n_1 < 0 \leq a_{n_1}$. Entonces volvemos a cambiar de resta a suma. Construimos entonces la sucesión oscilatoria:

$$a_1 = 0,\, a_2 = 0+1,\, a_3 = 0+1-1/2,\, a_4 = 0+1-1/2-1/3$$
$$a_5 = 0+1-1/2-1/3+1/4,\, a_6 = 0+1-1/2-1/3+1/4+1/5...$$

Se considera B el conjunto de los n tales que para construir a_{n+1} cambiamos el signo de menos a más, y C el análogo cuando pasamos de más a menos. □

En la siguiente sección probaremos que en el caso $E = \mathbb{R}$ los límites de Banach pueden "aproximarse" con combinaciones convexas de límites de Banach construidos usando ultrafiltros.

3.1.3. Límites de Banach en $\mathbb{R}$ y ultrafiltros

En lo que sigue trabajaremos con $E = \mathbb{R}$. En este caso se da la coincidencia de que los límites de Banach son elementos de ℓ_∞^* al tratarse de funcionales lineales continuos. De hecho, se puede decir más en este sentido.

Proposición 3.1.21. *En conjunto $\mathscr{BL}$ de los límites de Banach en $\mathbb{R}$ es un conjunto convexo y ω^*-compacto de ℓ_∞^*.*

Demostración. El hecho de que se trate de un convexo es obvio ya que cualquier combinación convexa de funcionales satisfaciendo (1), (2) y (3) de la definición 3.1.13 también satisface dichas propiedades. Para ver que se trata de un ω^*-compacto basta comprobar que es ω^*-cerrado, pues es acotado por definición (sus elementos están contenidos en la bola unidad) y el teorema de Alaoglu permite afirmar que todo acotado ω^*-cerrado es ω^*-compacto.

Supongamos que $(f_d)_{d\in D}$ es una red de límites de Banach ω^*-convergente a un cierto $f \in \ell_\infty^*$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión acotada por 1 entonces $f_d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in [-1,1]$, por ser $\|f_d\| \leq 1$. Tomando límite en la red se obtiene que $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in [-1,1]$, luego $\|f\| \leq 1$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente hacia x entonces $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \text{lím}_d f_d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \text{lím}_d x = x$. Por último, $f(S(\mathbf{x})) = \text{lím}_d f_d(S(\mathbf{x})) = \text{lím}_d f_d(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x} \in \ell_\infty$ ya que cada f_d es invariante por desplazamiento. Ésto prueba que f es un límite de Banach. □

El siguiente teorema liga los límites de Banach en $\mathbb{R}$ y los límites a través de ultrafiltros en un resultado a cuya prueba dedicaremos el resto de la sección. Aunque se trata de un resultado probado por Jerison [47], vamos seguir las notas *Meyer Jerison: The set of all generalized limits of bounded sequences* (`http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/papers/semtrf.html`) donde se expone la prueba en un lenguaje más cercano al que hemos estado manejando hasta ahora.

Teorema 3.1.22 ([47]). *Sea Q el conjunto de funcionales lineales de la forma*

$$f(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{k,\mathscr{V}} \frac{x_k + \ldots + x_{k+n-1}}{n}$$

donde $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$. Si $\mathscr{BL}$ denota el conjunto de los límites de Banach entonces $Q \subseteq \mathscr{BL}$ y $\overline{\mathrm{co}}(Q) = \mathscr{BL}$.

Lema 3.1.23. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $S_n : \ell_\infty \to \ell_\infty$ el operador definido en cada $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ como*

$$S_n(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x} + S(\boldsymbol{x}) + \ldots + S^{n-1}(\boldsymbol{x})}{n} = \left(\frac{x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{k+n-1}}{n}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Entonces existen

$$M(\boldsymbol{x}) = \lim_n \limsup_k S_n(\boldsymbol{x}) \qquad y \qquad m(\boldsymbol{x}) = \lim_n \liminf_k S_n(\boldsymbol{x}).$$

Además $m(\boldsymbol{x}) \leq L(\boldsymbol{x}) \leq M(\boldsymbol{x})$ para cada límite de Banach L.

Demostración. Fijemos una sucesión acotada de números reales $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La sucesión $a_n = \limsup_k (x_k + \ldots + x_{k+n-1})$ es subaditiva, es decir, $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ para cualesquiera números naturales m, n. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe k_n con $\sup_{k\geq k_n}(x_k + \ldots + x_{k+n-1}) \leq a_n + \varepsilon$ y análogamente k_m con $\sup_{k\geq k_m}(x_k + \ldots + x_{k+m-1}) \leq a_m + \varepsilon$. De este modo, si $k \geq k_{m+n} := k_n + k_m$ entonces

$$x_k + \ldots + x_{k+m+n-1} = (x_k + \ldots + x_{k+n-1}) + (x_{k+n} + \ldots + x_{k+m+n-1}) \leq a_n + a_m + 2\varepsilon.$$

Ahora vamos a probar lo que se conoce como lema de Fekete: *si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión subaditiva de números reales con $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada entonces existe $\lim_n \frac{a_n}{n}$.*

Llamemos $\alpha = \inf\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$ fijemos $d \in \mathbb{N}$ verificando $\frac{a_d}{d} \leq \alpha + \varepsilon$ y $K > 0$ tal que $K\varepsilon > \max\{\frac{a_r}{r} : 1 \leq r \leq d\}$. Si $n > dK$ entonces $n = dq + r$ para un $0 \leq r < d$, luego

$$\alpha \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{qa_d + a_r}{n} \leq \frac{q}{n} d(\alpha + \varepsilon) + \frac{rK\varepsilon}{dK} \leq \alpha + 2\varepsilon,$$

donde ponemos $a_r = 0$ si $r = 0$ en las desigualdades anteriores.

Usando este resultado auxiliar se obtiene que $M(\mathbf{x})$ está definido, y análogamente se razona con $m(\mathbf{x})$.

Vamos a ver que si L es un límite de Banach entonces $L(\mathbf{x}) \leq M(\mathbf{x})$ (para $m(\mathbf{x})$ el razonamiento es análogo). Usando que L es lineal e invariante por desplazamiento se comprueba que $L(S_n(\mathbf{x})) = L(\mathbf{x})$. Por otro lado $L(\mathbf{y}) \leq \limsup \mathbf{y}$ para cada $\mathbf{y} \in \ell_\infty$ ya que $L(\mathbf{y}) = L(S^n(\mathbf{y})) \leq \sup_{k\geq n} y_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $L(\mathbf{x}) \leq L(S_n(\mathbf{x})) \leq \limsup_k S_n(\mathbf{x})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce el resultado. □

Proposición 3.1.24. *Para cada $\boldsymbol{x} \in \ell_\infty$ y cada $\alpha \in [m(x), M(x)]$ existe un límite de Banach L con $L(\boldsymbol{x}) = \alpha$. En otras palabras, fijado $\boldsymbol{x}$ el conjunto de todos los posibles valores de los límites de Banach en $\boldsymbol{x}$ es el intervalo $[m(\boldsymbol{x}), M(\boldsymbol{x})]$.*

Demostración. La manera más sencilla de probarlo es usar el teorema de Hanh-Banach. Para ello notemos que $M(\mathbf{y})$ es un funcional sublineal $M(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2) \leq M(\mathbf{y}_1)+M(\mathbf{y}_2)$ y positivamente homogéneo $M(\lambda\mathbf{y}) = \lambda M(\mathbf{y})$ si $\lambda \geq 0$. Además $M(-\mathbf{y}) = -m(\mathbf{y})$ usando que $\inf_{a\in A} -a = -\sup_{a\in A} a$. Por el teorema de Hanh-Banach [32, theorem 2.1, p. 37] existe un funcional $f : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ que extiende a la función definida sobre el subespacio span$\{\mathbf{x}\}$ como $f(\mu\mathbf{x}) = \mu\alpha$ y verifica $-M(-\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{y}) \leq M(\mathbf{y})$ para cada $\mathbf{y} \in \ell_\infty$. Deducimos las siguientes propiedades:

- f es lineal y también continua pues $M(\mathbf{y}) \leq \|\mathbf{y}\|$ implica $|f(\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{y}\|$ para cada $\mathbf{y} \in \ell_\infty$.
- Si $\mathbf{y}$ es convergente hacia α entonces
$$M(\mathbf{y}) = \lim_n \limsup_k S_n(\mathbf{y}) = \lim_n \lim_k S_n(\mathbf{y}) = \lim_n \alpha = \alpha.$$
Análogamente $-M(-\mathbf{y}) = \alpha$, de modo que $f(\mathbf{y}) = \alpha$.
- Para cada $\mathbf{y} \in \ell_\infty$ es $M(\mathbf{y}-S(\mathbf{y})) = 0$ ya que al hacer la media
$$\frac{(\mathbf{y}-S(\mathbf{y}))+(S(\mathbf{y})-S^2(\mathbf{y}))+\ldots+(S^{n-1}(\mathbf{y})-S^n(\mathbf{y}))}{n} = \frac{\mathbf{y}-S^n(\mathbf{y})}{n}.$$
Se tiene que esta sucesión converge a cero, ya que el numerador está acotado uniformemente en n. Por tanto $f(\mathbf{y}-S(\mathbf{y})) = 0$, lo que se traduce en que $f = f\circ S$.

Por tanto, f es el límite de Banach del enunciado. □

Vamos a enunciar ahora los dos resultados fundamentales que necesitaremos para proseguir.

Definición 3.1.25. *Una cuaterna* $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ *es un* sistema de medida invariante *si* $\mathscr{B}$ *es una* σ*-álgebra sobre* X*,* $\mu : \mathscr{B} \to [0,\infty)$ *es una medida sobre* $\mathscr{B}$ *y* $T : X \to X$ *es una función medible que satisface*
$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$$
para cada $A \in \mathscr{B}$*.*

Una prueba del siguiente teorema, así como numerosa información relacionada, puede encontrarse en [30].

Teorema 3.1.26 (Teorema ergódico de Birkhoff)**.** *Sea* $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ *un sistema de medida invariante. Si* $f \in L_1(\mu)$ *entonces*
$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) = f^*(x)$$
converge casi en todo punto y en $L_1(\mu)$ *hacia una función* T*-invariante* $f^* \in L_1(\mu)$ *con*
$$\int f^* d\mu = \int f d\mu.$$

Una medida μ definida sobre la σ-algebra de Borel $\mathscr{B}$ de un espacio topológico X se dice que es una medida regular de Borel si verifica las siguientes propiedades:

1. $\mu(K) < \infty$ para cada compacto $K \subseteq X$.
2. Si $B \in \mathscr{B}$ entonces:
   - $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B \text{ compacto}\}$.
   - Si $\mu(B) < \infty$ entonces $\mu(B) = \text{ínf}\{\mu(U) : B \subseteq U \text{ abierto}\}$.

El siguiente teorema está probado en [23, C.18, p. 389]

Teorema 3.1.27 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sea X un espacio topológico compacto Hausdorff. Para cada operador lineal continuo positivo $T : C(X) \to \mathbb{R}$ existe una medida regular de Borel μ sobre X tal que*

$$T(f) = \int_X f\, d\mu$$

para cada $f \in C(X)$.

Sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la aplicación dada por $T(n) = n+1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Usando la compactificación de Stone-Čech el operador T anterior se extiende de manera única a una aplicación $T^\beta : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$. Notemos que para $\mathbf{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ se tiene que $\mathbf{x} \circ T^j = S^j(\mathbf{x})$, de modo que si $\mathbf{x}^\beta : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es la extensión de la sucesión $\mathbf{x}$ entonces

$$(\mathbf{x}^\beta \circ (T^\beta)^j)(\mathscr{U}) = (\mathbf{x} \circ T^j)^\beta(\mathscr{U}) = (S^j(\mathbf{x}))^\beta(\mathscr{U}) = \lim_{k,\mathscr{U}} S^j(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

para cada ultrafiltro $\mathscr{U}$, donde en la primera igualdad hemos usado la unicidad de la extensión a la compactificación $\beta\mathbb{N}$.

Proposición 3.1.28. *Para cada $\boldsymbol{x} \in \ell_\infty$ existe un ultrafiltro libre $\mathscr{G}$ sobre $\mathbb{N}$ tal que*

$$\lim_n \lim_{k,\mathscr{G}} S_n(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{x}) = \sup_{L\in\mathscr{BL}} L(\boldsymbol{x}).$$

Demostración. Fijemos un elemento $\mathbf{x} \in \ell_\infty$. Como $\mathscr{BL}$ es un conjunto ω^*-compacto y la función $\langle \mathbf{x}, - \rangle : \ell_\infty^* \to \mathbb{R}$ dada por $\langle \mathbf{x}, f \rangle := f(x)$ es ω^*-continua entonces existe $L_0 \in \mathscr{BL}$ tal que

$$M(\mathbf{x}) = \sup_{L\in\mathscr{BL}} L(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, L_0 \rangle = L_0(\mathbf{x})$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la proposición 3.1.24. Identificamos ℓ_∞ con $C(\beta\mathbb{N})$ (isomorfismo isométrico de espacios de Banach) asociando a cada sucesión $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ la (única) extensión $\mathbf{y}^\beta : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que además verifica $\mathbf{y}^\beta(\mathscr{U}) = \lim_{n,\mathscr{U}} y_n$ para cada $\mathscr{U} \in \beta\mathbb{N}$ por la proposición 2.5.2. El funcional $f : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ se puede ver entonces como una función $F : C(\beta\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ definida como $F(g) = f(g|_\mathbb{N})$. El teorema de Riesz nos permite afirmar que existe una medidad de Borel μ en $\beta\mathbb{N}$ verificando

$$L_0(\mathbf{y}) = \int_{\beta\mathbb{N}} \mathbf{y}^\beta(\mathscr{U})\, d\mu = \int_{\beta\mathbb{N}} \lim_{n,\mathscr{U}} \mathbf{y}\, d\mu.$$

para cada $\mathbf{y} \in \ell_\infty$. Vamos a ver ahora que $(\beta\mathbb{N}, \mathscr{B}, \mu, T^\beta)$ y $\mathbf{x}^\beta : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ satisfacen las hipótesis del teorema de Birkhoff.

- *Integrabilidad*: Tenemos que $\mathbf{x}^\beta$ verifica $|\mathbf{x}^\beta(\mathscr{U})| = |\text{lím}_{n,\mathscr{U}} x_n| \leq \text{lím}_{n,\mathscr{U}} |x_n|$, de modo que

$$\int_{\beta\mathbb{N}} |\mathbf{x}^\beta(\mathscr{U})|\, d\mu \leq \int_{\beta\mathbb{N}} \lim_{n,\mathscr{U}} |x_n|\, d\mu = L_0((|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}) < \infty$$

implica $\mathbf{x}^\beta \in L_1(\mu)$.
- *Medibilidad*: Vamos a ver que T^β es $\mathscr{B}$-medible viendo que la imagne inversa de un abierto básico es también un abierto básico. Notemos que $T^\beta(\mathscr{U}) \in V(A)$ si y sólo si $A \in T^\beta(\mathscr{U})$. Por el corolario 2.5.3 deducimos que la afirmación anterior es equivalente a que exista $B \in \mathscr{U}$ con $T[B] \subseteq A$, o también, que $T^{-1}[A] \in \mathscr{U}$. Por tanto $(T^\beta)^{-1}[V(A)] = V(T^{-1}[A])$.
- *Invarianza*: Tenemos que comprobar que $\mu((T^\beta)^{-1}[B]) = \mu(B)$ para cada $B \in \mathscr{B}$ (la σ-álgebra de Borel en $\beta\mathbb{N}$). Para la familia de abiertos básicos de $\beta\mathbb{N}$, $\{V(A) : A \subseteq \mathbb{N}\}$ tenemos que

$$L_0(\chi_A) = \int_{\beta\mathbb{N}} \chi_A^\beta(\mathscr{U})\, d\mu = \int_{\beta\mathbb{N}} \lim_{n,\mathscr{U}} \chi_A\, d\mu = \int_{V(A)} 1\, d\mu = \mu(V(A)).$$

Usando la igualdad $(T^\beta)^{-1}[V(A)] = V(T^{-1}[A])$ probada en el punto anterior deducimos que

$$\mu((T^\beta)^{-1}[V(A)]) = \mu(V(T^{-1}[A])) = L_0(\chi_{T^{-1}[A]}) = L_0(S(\chi_A)) = L_0(\chi_A) = \mu(V(A)).$$

Ahora tendríamos que probarlo para el resto de borelianos, sin embargo el teorema [30, teorema A.8, p. 405] nos dice que en el caso de que estemos en un espacio de probabilidad (en nuestro caso $\mu(\beta\mathbb{N}) = L_0(\mathbf{1}) = 1$) y la igualdad sea cierta para una semi-álgebra que genere la σ-álgebra $\mathscr{B}$ (una semi-álgebra es una familia de conjuntos que contiene al vacío, es cerrada para intersecciones finitas y tal que el complementario de uno de sus elementos es unión finita de elementos disjuntos de la misma familia) entonces la igualdad es también cierta para todos los elementos de la σ-álgebra que genera dicha familia. Como la familia de abiertos básicos $\{V(A) : A \subseteq \mathbb{N}\}$ genera $\mathscr{B}$ por definición de σ-álgebra de Borel, y además es semi-álgebra por las propiedades que vimos en el capítulo 2, deducimos el resultado.

Observar que $\mu(\mathbb{N}) = 0$. Es una consecuencia de que $\mu(\{n\}) = L_0(\chi_{\{n\}}) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y la σ-aditividad de μ. Por el teorema de Birkhoff (teorema 3.1.26) deducimos que existe un conjunto $\Delta \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tal que $\mu(\Delta) = 1$ y el siguiente límite existe para cada $\mathscr{U} \in \Delta$

$$X(\mathscr{U}) := \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} (\mathbf{x}^\beta \circ (T^\beta)^j)(\mathscr{U})$$

Usando la ecuación (3.3) podemos reescribir

$$X(\mathscr{U}) = \lim_n \lim_{k,\mathscr{U}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} S^j(\mathbf{x}) = \lim_n \lim_{k,\mathscr{U}} S_n(\mathbf{x})$$

(recordar la definición de S_n en el lema 3.1.23).

Podemos extender X para tener una función bien definida $X : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ asignando $X(\mathscr{G}) = 0$ para todo $\mathscr{G} \in \beta\mathbb{N} \setminus \Delta$. Para cada $\mathscr{U} \in \Delta$ es

$$\lim_{k,\mathscr{U}} S_n(\mathbf{x}) \leq \limsup_k S_n(\mathbf{x})$$

por la ecuación (3.1), de manera que

$$X(\mathscr{U}) = \lim_n \lim_{k,\mathscr{U}} S_n(\mathbf{x}) \leq \lim_n \limsup_k S_n(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) = L_0(\mathbf{x}). \tag{3.4}$$

El teorema ergódico de Birkhoff también implica

$$\int_{\beta\mathbb{N}} X(\mathscr{U})\, d\mu = \int_{\beta\mathbb{N}} \mathbf{x}^{\beta}(\mathscr{U})\, d\mu = L_0(\mathbf{x}). \tag{3.5}$$

Las relaciones (3.4) y (3.5) permiten concluir que existe $\mathscr{G} \in \Delta$ tal que

$$L_0(\mathbf{x}) = X(\mathscr{G}) = \lim_n \lim_{k,\mathscr{G}} S_n(\mathbf{x}).$$

□

Lema 3.1.29. *Para cualesquiera pares de ultrafiltros libres $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ sobre $\mathbb{N}$ se tiene que el funcional $f : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definido por*

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{k,\mathscr{V}} S_n(\boldsymbol{x}) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{k,\mathscr{V}} \frac{x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{k+n-1}}{n}$$

es un límite de Banach.

Demostración. Se trata obviamente de una aplicación lineal tal que $|f(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty$ para cada $\mathbf{x} \in \ell_\infty$, luego también es continua. Si $\mathbf{x}$ es una sucesión convergente hacia un cierto α entonces $\frac{x_k+x_{k+1}+\ldots+x_{k+n-1}}{n}$ también converge a α tomando límite en k, de manera que $f(\mathbf{x}) = \alpha$. Por último, se trata de una aplicación invariante por desplazamiento ya que

$$S_n(\mathbf{x} - S(\mathbf{x})) = \frac{(\mathbf{x} - S(\mathbf{x})) + \ldots + (S^{n-1}(\mathbf{x}) - S^n(\mathbf{x}))}{n} = \frac{\mathbf{x} - S^n(\mathbf{x})}{n}$$

implica $\|S_n(\mathbf{x} - S(\mathbf{x}))\|_\infty \leq 2\|\mathbf{x}\|_\infty/n$ y al tomar límites a través de los ultrafiltros del enunciado se deduce que $f(\mathbf{x} - S(\mathbf{x})) = 0$. □

Finalmente enunciamos el siguiente resultado técnico que se sigue de los teorema de Hanh-Banach y que puede encontrarse en [46, teorema 1].

Teorema 3.1.30. *Si E es un espacio localmente convexo, C un subconjunto convexo compacto de E y $S \subseteq C$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para cada funcional lineal y continuo $f : E \to \mathbb{R}$ tenemos que*

$$\sup_{x \in S} f(x) = \sup_{x \in C} f(x).$$

2. *$C = \overline{\text{co}}(S)$.*

Ya estamos en condiciones de probar el teorema principal de la sección.
Demostración del teorema 3.1.22. El lema 3.1.29 nos da el contenido $Q \subseteq \mathscr{BL}$. Por otro lado, sabemos que $\mathscr{BL}$ es un conjunto convexo y ω^*-compacto en ℓ_∞^* por la proposición 3.1.21. Por el teorema 3.1.30 tenemos que es suficiente probar que para cada $\mathbf{x} \in \ell_\infty^*$

$$\sup_{f\in Q} f(\mathbf{x}) = \sup_{f\in\mathscr{BL}} f(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}).$$

Pero esta igualdad es cierta por la proposición 3.1.28.

3.2. Ultraproductos de espacios de Banach

La construcción de los ultraproductos tiene sus inicios en los años 30 con K. Gödel y T. Skolem, aunque no fué hasta 1955 con la publicación de *Fundamental Theorem of Ultraproducts* de J. Łos, que la construcción de describe de una manera explícita y su importancia en el ámbito de la lógica se hace palpable. Años más tarde A. Robinson introduce el análisis no standard, lo que marca el inicio del uso de ideas de teoría de modelos y ultraproductos en análisis.

El paso a espacios de Banach estuvo precedido por desarrollo de la teoría local de espacios de Banach con los trabajos de J. Lindestrauss, A. Pelczynski, H. P. Rosenthal y R. C. James. La teoría local de espacios de Banach estudia la estructura de los subespacios finito dimensionales de espacios de Banach, y las propiedades del espacio que se relacionan con dicha estructura. En general, estas propiedades se caracterizan con ciertas expresiones o desigualdades que involucran a un número finito de elementos del espacio. Esta idea motivó el uso de ultraproductos de espacios de Banach, cuya definición formal fue dada por D. Dacunha-Castelle y J. L. Krivine [24]. El uso de estas técnicas permitió la resolución de problemas abiertos en teoría local de espacios de Banach así como en teoría de operadores.

3.2.1. Construcción y propiedades

Sea I un conjunto no vacío y $(E_i)_{i\in I}$ una familia de espacios de Banach. Entonces

$$\ell_\infty(I,E_i) = \{x = (x_i)_{i\in I} : x_i \in E_i \text{ para cada } i \in I, \sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty\}$$

es un espacio de Banach con la norma $\|x\|_\infty = \sup_{i\in I} \|x_i\|$.

Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I y $T : \ell_\infty(I,E_i) \to \mathbb{R}$ la aplicación definida para cada $(x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,E_i)$ como

$$T(x_i)_{i\in I} = \lim_{i,\mathscr{U}} \|x_i\|.$$

Se trata de una aplicación $\|\cdot\|_\infty - |\cdot|-$continua. En efecto,

$$|T(x_i)_{i\in I} - T(y_i)_{i\in I}| = \left|\lim_{i,\mathscr{U}} (\|x_i\| - \|y_i\|)\right| = \lim_{i,\mathscr{U}} |\|x_i\| - \|y_i\|| \leq \lim_{i,\mathscr{U}} \|x_i - y_i\| \leq \|(x_i)_{i\in I} - (y_i)_{i\in I}\|_\infty.$$

Como consecuencia de la continuidad, el conjunto

$$\mathcal{N}_{\mathcal{U}} := \{x = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,E_i) : \lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\}$$

es un subconjunto cerrado de $\ell_\infty(I,E_i)$.

La siguiente definición es debida a Dauvinha-Cabelle y Krivine (1972).

Definición 3.2.1. *El* ultraproducto *de $(E_i)_{i\in I}$ con respecto a $\mathcal{U}$ es el espacio de Banach*

$$(E_i)_{\mathcal{U}} = \ell_\infty(I,E_i)/\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$$

equipado de la topología cociente. Si $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,E_i)$ entonces su clase de equivalencia se denota $(x_i)_{\mathcal{U}}$ o $(\boldsymbol{x})_{\mathcal{U}}$.

Si $E_i = E$ para cada $i \in I$ entonces el ultraproducto se denota simplemente como $(E)_{\mathcal{U}}$ y se denomina la ultrapotencia *de E con respecto de $\mathcal{U}$.*

La norma de los elementos del ultraproducto se puede escribir de la siguiente manera.

Proposición 3.2.2. *Si $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,E_i)$ entonces*

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i\|.$$

Demostración. Pongamos $\alpha = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|$. Sea $y = (y_i)_{i\in I} \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}$, $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,E_i)$. Por la desiguladad triangular,

$$|\|x_i\| - \|y_i\|| \le \|x_i + y_i\| \le \|x_i\| + \|y_i\|$$

para cada $i \in I$. Como consecuencia de estas desigualdades, de la linealidad y de la continuidad del valor absoluto tenemos que $\lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i + y_i\| = \lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i\| = \alpha$, luego $\sup_{i\in I} \|x_i + y_i\| \ge \alpha$ para cada $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in I} \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}$. De este modo, la norma cociente verifica

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \|\mathbf{x} + \mathcal{N}_{\mathcal{U}}\| = \inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{N}_{\mathcal{U}}} \sup_{i\in I} \|x_i + y_i\| \ge \alpha.$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ la definición de límite a través de un ultrafiltro nos dice que $I_\varepsilon = \{i \in I : \|x_i\| \le \alpha + \varepsilon\}$ es un elemento de $\mathcal{U}$. Consideremos ahora el elemento $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,E_i)$ definido como

$$y_i = \begin{cases} 0 & i \in I_\varepsilon, \\ -x_i & i \notin I_\varepsilon. \end{cases}$$

Para cada $\delta > 0$ tenemos que I_ε es un subconjunto de $\{i \in I : \|y_i\| < \delta\}$, así que este último conjunto también pertenece a $\mathcal{U}$. Por tanto $\mathbf{y} \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ y además $\|x_i + y_i\| \le \alpha + \varepsilon$ para cada $i \in I$. Concluimos que

$$\inf_{\mathbf{y}\in\mathcal{N}_{\mathcal{U}}} \sup_{i\in I} \|x_i + y_i\| \le \alpha + \varepsilon.$$

□

Todo espacio de Banach se puede inyectar (isométricamente) de manera natural en cualquier ultrapotencia suya.

Corolario 3.2.3. *La aplicación $j : E \to (E)_{\mathscr{U}}$ definida como $j(x) = (x_i)_{\mathscr{U}}$ donde $x_i = x$ para cada $i \in I$, es un embebimiento lineal isométrico.*

Demostración. Obviamente se trata de una aplicación lineal. Si $x \in E$ y $\mathbf{x} = j(x)$ entonces

$$\|j(\mathbf{x})\| = \|(x_i)_{\mathscr{U}}\| = \lim_{i,\mathscr{U}} \|x_i\| = \lim_{i,\mathscr{U}} \|x\| = \|x\|.$$

□

Proposición 3.2.4. *Sean $(E_i)_{i\in I}, (F_i)_{i\in I}$ familias de espacios de Banach. Para cada $i \in I$ sea $T_i \in L(E_i, F_i)$ un operador de modo que $M := \sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$. Entonces la aplicación $(T_i)_{\mathscr{U}} : (E_i)_{\mathscr{U}} \to (F_i)_{\mathscr{U}}$ dada por $(T_i)_{\mathscr{U}}((x_i)_{\mathscr{U}}) = (T_i x_i)_{\mathscr{U}}$ define un operador lineal y continuo con $\|(T_i)_{\mathscr{U}}\| \leq M$.*

Demostración. Observar que $(T_i x_i)_{i\in I}$ pertenece a $\ell_\infty(I, F_i)$ pues $\|T_i x_i\| \leq M\|\mathbf{x}\|_\infty$. De este modo tenemos una aplicación lineal y continua

$$\phi : \ell_\infty(I, E_i) \to \ell_\infty(I, F_i)$$

$$(x_i)_{i\in I} \rightsquigarrow (T_i x_i)_{i\in I}$$

Supongamos que $(x_i)_{i\in I} \in \mathscr{N}_{\mathscr{U}}$. Dado $\varepsilon > 0$ la definición de límite a través de un ultrafiltro nos dice que

$$I_0 = \{i \in I : \|x_i\| < \varepsilon/M\} \in \mathscr{U}.$$

Si $i \in I_0$ entonces $\|T_i x_i\| \leq \|T_i\|\|x_i\| < \varepsilon$, de modo que

$$I_0 \subseteq \{i \in I : \|T_i x_i\| < \varepsilon\} \in \mathscr{U}.$$

Ésto prueba que $\lim_{i,\mathscr{U}} \|T_i x_i\| = 0$. En otras palabras, ϕ lleva los elementos que se anulan en $(E_i)_{\mathscr{U}}$ a elementos que se anulan en $(F_i)_{\mathscr{U}}$. Usando el teorema del homomorfismo, existe una única aplicación lineal $(T_i)_{\mathscr{U}} : (E_i)_{\mathscr{U}} \to (F_i)_{\mathscr{U}}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \ell_\infty(I, E_i) & \longrightarrow & \ell_\infty(I, F_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E_i)_{\mathscr{U}} & \dashrightarrow & (F_i)_{\mathscr{U}} \end{array}$$

donde los morfismos verticales son las proyecciones canónicas y el morfismo horizontal superior es ϕ. Como

$$\|(T_i)_{\mathscr{U}}(x_i)_{\mathscr{U}}\| = \|(T_i x_i)_{\mathscr{U}}\| = \lim_{i,\mathscr{U}} \|T_i x_i\| \leq \lim_{i,\mathscr{U}} \|T_i\|\|x_i\| = \left(\lim_{i,\mathscr{U}} \|T_i\|\right) \|(x_i)_{\mathscr{U}}\|,$$

(notar que existe $\text{lím}_{i,\mathscr{U}} \|T_i\|$ pues $(\|T_i\|)_{i\in I}$ es una familia acotada de números reales) se deduce que $(T_i)_{\mathscr{U}}$ es continua. Por otro lado, fijado $\varepsilon > 0$, para cada $i \in I$ podemos encontrar $x_i \in E_i$ tal que $\|x_i\| = 1$ y $\|T_i\| - \varepsilon \leq \|T_i x_i\| \leq \|T_i\|$. Tomando entonces límite a través del ultrafiltro $\mathscr{U}$ se deduce que

$$\left(\text{lím}_{i,\mathscr{U}} \|T_i\|\right) - \varepsilon \leq \|(T_i x_i)_{\mathscr{U}}\| \leq \text{lím}_{i,\mathscr{U}} \|T_i\|.$$

Por tanto, $\|(T_i)_{\mathscr{U}}\| = \text{lím}_{i,\mathscr{U}} \|T_i\|$.

$\square$

Proposición 3.2.5. *Supongamos que $\dim(M) < \infty$. Entonces para cada conjunto I y cada ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre I se tiene que $(M)_{\mathscr{U}}$ y M son isométricos.*

Demostración. Si $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,M)$ entonces $\{x_i : i \in I\}$ es un subconjunto relativamente compacto de M y se puede definir la aplicación $T : \ell_\infty(I,M) \to M$ dada por $T(\mathbf{x}) = \text{lím}_{i,\mathscr{U}} \mathbf{x}$, que es claramente lineal y sobreyectiva. Además su núcleo

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in \ell_\infty(I,M) : \text{lím}_{i,\mathscr{U}} x_i = 0\} = \{\mathbf{x} \in \ell_\infty(I,M) : \text{lím}_{i,\mathscr{U}} \|x_i\| = 0\} = \mathscr{N}_{\mathscr{U}}$$

por la continuidad de la norma. El primer teorema de isomorfía garantiza que T induce un isomorfismo algebraico

$$\overline{T} : \frac{\ell_\infty(I,M)}{\text{Ker}\, T} \to M.$$

De hecho $\overline{T}(\mathbf{x}) = \|\text{lím}_{i,\mathscr{U}} \mathbf{x}\| = \text{lím}_{i,\mathscr{U}} \|x_i\| = \|(x_i)_{\mathscr{U}}\|$ $\square$

Capítulo 4

Estabilidad en espacios de Banach

Un problema clásico de la teoría de espacios normados que se remonta al libro de Banach *Théorie des operations linéaires* es el siguiente: ¿Existen copias de ℓ^p o c_0 en cada espacio de Banach de dimensión infinita?

Dvoretzky [29] probó que para cada espacio de Banach E infinito-dimensional y cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un subespacio X_n de E isomorfo casi isométricamente al espacio de Hilbert n-dimensional ℓ^2_n. Usando los conceptos de tipo y cotipo (parámetros asociados a cada espacio de Banach E), Maurey y Pisier [56] reformularon el teorema anterior determinando otros reales p para los que también es cierto con ℓ^p_n en lugar de ℓ^2_n.

Sin embargo, para el problema general de si un espacio de Banach E, en cuya definición no interviene el número real $p \in [1,\infty)$, contiene una copia isomorfa a ℓ^p sólo se conocían algunos casos. Por ejemplo, Lindestrauss y Tzafiri [54] habían probado que un espacio de Orlicz de sucesiones contiene una copia de un ℓ^p o c_0 haciendo uso del teorema del punto fijo de Schauder-Tychonoff.

En 1974, Tsirelson [74] construye un ejemplo de un espacio de Banach reflexivo con base incondicional y sin copias de ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ ni de c_0. El problema se transforma ahora en caracterizar los espacios de Banach que contienen copias de ℓ^p y c_0.

En 1981 Aldous [2] prueba que todo subespacio de $L^1(\mu)$ (para un espacio de probabilidad arbitrario (Ω,Σ,μ)) contiene una copia isomorfa a ℓ^p para algún $p \in [1,2]$, usando complicados métodos probabilísticos (teoría de medidas aleatorias). Dicho resultado había sido probado por Kadec y Pelczynski para subespacios no reflexivos (con $p = 1$) y conjeturado por Rosenthal para los reflexivos. Las ideas de Aldous fueron mejoradas por J. L. Krivine y B. Maurey, que en [50] dan una demostración más general y más sencilla de dicho resultado que se aplica a una amplia clase de espacios de Banach a los que denominan *estables*.

Un espacio de Banach es estable si para cada par de sucesiones acotadas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de E y cada par de ultrafiltros no triviales $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ sobre $\mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x_n + y_m\| = \lim_{m,\mathscr{V}} \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n + y_m\|. \tag{4.1}$$

El teorema fundamental presentado por Maurey y Krivine es el siguiente: *Sea E un espacio de Banach estable de dimensión infinita, entonces existe un $p \in [1,+\infty)$ tal que ℓ^p es isomorfo casi isométricamente a un subespacio de E*. Los espacios $L^p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ son estables, y todo subespacio de un estable es estable, luego el resultado de Krivine y Maurey extiende el resultado de Aldous.

No obstante, el concepto de espacio de Banach estable no contempla el espacio c_0. De hecho, y como veremos en este capítulo, si un espacio de Banach contiene una copia isomorfa de c_0 entonces dicho espacio no puede ser estable.

D. J. H. Garling e (independientemente) S. Argyros, S. Negrepontis y Th. Zachariades [7] introdujeron la clase de los *espacios de Banach débilmente estables*. Un espacio de Banach E se dice que es débilmente estable si la ecuación 4.1 es cierta para cada par de ultrafiltros $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ sobre $\mathbb{N}$ y cada par de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenidas en un débil compacto. El principal rasgo de esta propiedad frente a la introducida por Krivine y Maurey es que c_0 sí es débilmente estable, y el resultado fundamental afirma: *todo espacio de Banach de dimensión infinita débilmente estable contiene un subespacio isomorfo casi-isométricamente a ℓ^p (para algún $1 \leq p < +\infty$) o a c_0.* Conviene señalar que la estabilidad débil no llega a caracterizar la propiedad de contener a ℓ^p o c_0, es decir, existen espacios no débilmente estables con copias de ℓ^p o c_0 (ver [7]). En este sentido, destacar el artículo de José Iovino [45] en el que aborda desde un punto de vista "local" las nociones de estabilidad y la estabilidad débil para caracterizar a los espacios que contienen una copia de c_0 o ℓ^p casi isométricamente.

Este capítulo ha supuesto un reto que surgió a raíz de leer la tesina de licenciatura de Luis Blanco Román [66], en la que estudiaba y recogía la teoría desarrollada por Krivine y Maurey en torno a los espacios débilmente estables. El problema original y la teoría que se desarrolla (con la inclusión de ultrafiltros) me resultaron bastante atractivos; así que, tras leer su tesina con bastante entusiasmo, decidí investigar un poco más sobre el tema para comprobar qué recientes resultados se habían publicado al respecto. Descubrí entonces la existencia del artículo de Argyros, Negrepontis y Zachariades sobre estabilidad débil. Siguiendo el ejemplo de Luis Blanco, la propuesta fue estudiar y analizar este último artículo comparándolo con la teoría original de estabilidad. Aunque los resultados son en muchos sentidos paralelos a los de Krivine y Maurey, algunas de las propiedades clave de los espacios estables se pierden cuando trabajamos con estabilidad débil. Ésto obliga a refinar argumentos e incluso a recurrir a resultados avanzados y profundos de teoría de espacios de Banach para sortear los obstáculos. La intención en este capítulo es presentar de una manera detallada la prueba del teorema de existencia de copias casi isométricas de espacios débilemente estables; poniendo especialmente de manifiesto las dificultades al pasar de espacios estables a espacios débilmente estables.

En la primera sección vamos a recordar algunos resultados sobre sucesiones y bases en espacios de Banach que serán de utilidad en el capítulo.

La siguiente sección comienza con la definición de las dos nociones de estabilidad. Se exponen algunas equivalencias y ejemplos, probándose el hecho de que c_0 no es estable.

En la sección siguiente estudiaremos el espacio de tipos. Aunque la construcción original es para espacios métricos arbitrarios, vamos a presentar una adaptación de la prueba al caso de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ separable, que es el que nos va a interesar. El espacio de tipos $T(E)$ es un espacio métrico polaco que contiene a E como un subconjunto denso y tal que la topología inducida coincide con la original de E. La posibilidad de extender la suma de E a $T(E)$ (o a un subconjunto intermedio entre ambos) depende de la estabilidad o estabilidad débil de E, y es lo que llamaremos producto de convolución. Al contrario que en E, la operación de convolución no es conjuntamente continua, sino separadamente continua hecho que marcará muchos de nuestros razonamientos. También usaremos ultraproductos para construir el llamado *spreading model* como una herramienta más de cara al resultado final. Algunas de las demostraciones son originales como la proposición 4.4.3 o el corolario 4.3.20

En la última sección, comenzaremos probando que la existencia de copias casi isométricas de ℓ^p o c_0 viene dada por la existencia de unos tipos específicos en $T(E)$, los llamados ℓ^p-tipos y c_0-tipos. El resto de la sección se dedica a probar la existencia de tales tipos usando la maquinaria desarrollada en secciones anteriores.

4.1. Sucesiones y bases en espacio de Banach

Recordamos algunas definiciones sobre bases en un espacio de Banach. Las principales referencias en esta sección son [53], [32], [25].

Definición 4.1.1. *Una sucesión $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos en E se dice que es una* base de Schauder *de E si para cada $x \in E$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$x = \lim_m \sum_{n=1}^{m} a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Como ejemplos más sencillos, en c_0 o en ℓ^p con $(1 \leq p < \infty)$, la sucesión de vectores canónicos $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ constituye una base de Schauder de dichos espacios.

Definición 4.1.2. *Una sucesión $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ en un espacio de Banach E se dice que es*

1. básica *si es una base de Schauder de $\overline{\mathrm{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.*
2. base incondicional *de E si es base de Schauder de E verificando que para cada $x \in E$ su expansión $x = \sum_n a_n e_n$ converge incondicionalmente.*
3. básica incondicional *si es base incondicional de $\overline{\mathrm{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Resulta de gran utilidad la siguiente caracterización de las sucesiones básicas incondicionales tomada de [32, proposición 6.31, p. 181].

Proposición 4.1.3. *Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en E. Son equivalentes:*

1. *$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión básica incondicional.*
2. *Existe una constante K tal que para cualesquiera escalares $a_1, \dots, a_m$ y signos $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ tenemos*
$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i e_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\|.$$
3. *Existe una constante L de modo que para cualesquiera escalares $a_1, \dots, a_m$ y todo subconjunto A de $\{1, \dots, m\}$ se tiene*
$$\left\| \sum_{i \in A} a_i e_i \right\| \leq L \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\|.$$

Diremos que es K_0-incondicional ($K_0 > 0$) si verifica la condición 2. para $K = K_0$. Además en la prueba de 2) $\Rightarrow$ 3) se comprueba que se puede tomar $L \leq K$.

Definición 4.1.4. *Dos bases $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{y_n : n \in N\}$ de espacios de Banach E, F se dice que son* equivalentes *si existen constantes $M_1, M_2 > 0$ tales que*

$$M_1 \left\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq M_2 \left\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i \right\| \tag{4.2}$$

para cualesquiera sucesiones de escalares $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$.

Ésto también es equivalente a decir que existe un isomorfismo $T : E \to F$ de espacios de Banach con $T(e_i) = f_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Señalar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en un espacio de Banach E e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión arbitraria en posiblemente otro espacio de Banach Y de manera que verifican una relación del tipo (4.2) entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión básica (ver [32, definition 6.16, fact 6.17]).

Definición 4.1.5. *Una sucesión básica $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de E se dice que es* simétrica *si para cualquier permutación π de $\mathbb{N}$ se tiene que $\{x_{\pi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión básica equivalente a la inicial.*

Diremos que un espacio de Banach F con base de Schauder $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es *isomorfo casi isométricamente* a un subespacio de E si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E tal que

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|_E \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \right\|_F \leq (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|_E$$

para cualquier $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$.

Para el caso de los espacios $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ se tiene la siguiente propiedad: si un espacio de Banach E contiene una copia isomorfa de c_0 (resp. ℓ^1) entonces c_0 (resp. ℓ^1) es isomorfo casi isométricamente a un subespacio de E. Para probar esta afirmación basta hacer uso de un resultado de James (1964) sobre la no existencia de normas distorsionadas en c_0 (de hecho, James lo prueba para ℓ^1 de manera muy similar). Ésto signfica que si $|||\cdot|||$ es una norma en c_0 (resp. ℓ^1) equivalente a la ordinaria entonces $(c_0, |||\cdot|||)$ (resp. $(\ell^1, |||\cdot|||)$) contiene algún subespacio cerrado "casi isométrico" a c_0 (resp. ℓ^1).

Para ello se usa una idea basada en la construcción de bloques.

Definición 4.1.6. *Una* sucesión de bloques $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de una sucesión básica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores no nulos de la forma $y_j = \sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1} b_k x_k$ para alguna sucesión creciente de números naturales $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$*

Toda sucesión de bloques de una sucesión básica es también sucesión básica (es una consecuencia inmediata de la caracterización de sucesiones básicas dada en [32, proposition 6.13, p. 169]).

Denotaremos por $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ al conjunto de vectores canónicos de c_0 y ℓ^1. El siguiente resultado puede encontrarse en [53, Proposition 2.e.3, p. 97].

Lema 4.1.7 (James)**.** *Sea E un espacio de Banach isomorfo a c_0 y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica de E equivalente a la base canónica de c_0. Para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de bloques normalizados de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es $(1+\varepsilon)$-equivalente a $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq c_0$.*

El mismo resultado se verifica para ℓ^1.

Demostración. Por hipótesis existen $M_1, M_2 > 0$ tales que

$$M_1 \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| \le \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \le M_2 \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$$

para cada sucesión de escalares $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$. Podemos suponer que $M_1 = 1$ sustituyendo el isomorfismo T por T/M_1. Denotamos M_2 simplemente por M.

Definimos la sucesión

$$\alpha_n = \inf_{m>n} \left\{ \max_{n\le i\le m} |a_i| : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}, \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i x_i \right\| = 1 \right\}.$$

Observemos que $\alpha_n \le 1 \le M\alpha_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, o dicho de otro modo, $(\alpha_n)_n \subseteq [1/M, 1]$. Además $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente pues si $m > n+1$ y $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ verifica $\|\sum_{i=n+1}^{m} a_i x_i\| = 1$ entonces definiendo $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como $b_n = 0$ y $b_i = a_i$ si $i \ne n$, tenemos que

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} b_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} a_i x_i \right\| = 1,$$

y por definición $\alpha_n \le \max_{n\le i\le m} |b_i| = \max_{n+1\le i\le m} |a_i|$. Como $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ es arbitrario (para tales propiedades) obtenemos $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$. La sucesión α_n converge por tanto hacia $\alpha \in [1/M, 1]$.

Fijado $1/2 > \varepsilon > 0$ arbitrario, existe n_0 tal que $\alpha_n > \alpha(1-\varepsilon)^{1/2}$ para cada $n \ge n_0$. De manera recursiva, a partir de $\alpha_{n_{k-1}}$ construimos una sucesión de bloques normalizados y_k del siguiente modo: por definición de $\alpha_{n_{k-1}}$ existe $n_k > n_{k-1}$ y una sucesión $(b_i^k)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ tal que

$$\left\| \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} b_i^k x_i \right\| = 1 \quad y \quad \max_{n_{k-1}\le i\le n_k-1} |b_i^k| < \frac{\alpha_{n_{k-1}}}{(1-\varepsilon)^{1/2}} \le \frac{\alpha}{(1-\varepsilon)^{1/2}}.$$

Definimos $y_k = \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} b_i^k x_i$ para cada $k\in\mathbb{N}$.

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un elemento de c_{00} con

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} (a_k b_i^k) x_i \right\| = 1.$$

Por la definición de α_{n_0} y las propiedades de los b_j^k deducimos que

$$1 \le \frac{\max_{k,j} |a_k \cdot b_j^k|}{\alpha_{n_0}} \le \frac{\max_k |a_k| \frac{\alpha}{(1-\varepsilon)^{1/2}}}{\alpha_{n_0}} \le \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \frac{1}{1-\varepsilon}. \tag{4.3}$$

En general, procediendo por homogeneidad

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|\right)$$

para cada sucesión de escalares $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con soporte finito. Por otro lado, si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ y $|a_{k_0}| = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ entonces, usando la desigualdad anterior deducimos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, y_k\right\| &\geq \|2a_{k_0}y_{k_0}\| - \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k - 2a_{k_0}y_{k_0}\| \geq 2|a_{k_0}| - \frac{|a_{k_0}|}{1-\varepsilon} = \\ &= \left(2 - \frac{1}{1-\varepsilon}\right)|a_{k_0}| = \left(\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\max_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \geq (1-2\varepsilon)\max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.\end{aligned}$$

En resumen, dada una sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de escalares con soporte finito tenemos que

$$(1-2\varepsilon)\max_i |a_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\max_i |a_i|\right).$$

Tenemos que ver ahora el caso de ℓ^1. Dado que el razonamiento es análogo omitiremos los detalles. Suponemos igual que antes que existe $M > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\| \leq M \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

para cada sucesión de escalares $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$. Definimos ahora

$$\alpha_n = \sup_{m>n}\left\{\sum_{i=n}^{m} |a_i| : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}, \left\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\right\| = 1\right\}.$$

Se tiene entonces que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [1/M, 1]$ verifica $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego existe $\alpha = \lim_n \alpha_n$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{n_0} < \alpha(1+\varepsilon)^{1/2}$. Por definición de α_{n_0} existe $n_1 \in \mathbb{N}$ y una sucesión $(b_i^1)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ tal que

$$\sum_{i=n_0}^{n_1-1} |b_i^1| > \frac{\alpha_{n_0}}{(1+\varepsilon)^{1/2}} \geq \frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^{1/2}} \quad \text{y} \quad \left\|\sum_{i=n_0}^{n_1-1} b_i^1 x_i\right\| = 1.$$

Llamemos $y_1 = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} b_i^1 x_i$. De manera recursiva se construye una sucesión de bloques normalizados $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donde cada y_k se construye a partir de $\alpha_{n_{k-1}}$ del siguiente modo:

$$y_k = \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} b_i^k x_i, \quad \|y_k\| = 1, \quad \sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} |b_i^k| > \frac{\alpha_{n_{k-1}}}{(1+\varepsilon)^{1/2}} \geq \frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^{1/2}}.$$

De esta manera para cada sucesión de escalares $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ (con soporte finito) que satisfaga $\|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i y_i\| = 1$ se verifica

$$1 = \left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i y_i\right\| = \left\|\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_i b^i_j x_j\right\| \geq \frac{\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(|a_i|\sum_{j\in\mathbb{N}}|b^i_j|\right)}{\alpha_{n_0}}$$
$$\geq \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i| \frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^{1/2}\alpha_{n_0}} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i|.$$

Por tanto

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i| \leq \left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i y_i\right\| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i|.$$

□

4.2. Espacios de Banach estables y débilmente estables

A lo largo de esta sección $(E, \|\cdot\|)$ denotará un espacio de Banach.

Definición 4.2.1. *El espacio de Banach E se denomina* débilmente estable *(resp.* estable*) si para cualquier pareja de familias $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ contenidas en un conjunto débil compacto (resp. acotado) de E y para cada par de ultrafiltros no principales $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ sobre I y J respectivamente, se tiene que*

$$\lim_{i,\mathscr{U}}\lim_{j,\mathscr{V}}\|x_i + y_j\| = \lim_{j,\mathscr{V}}\lim_{i,\mathscr{U}}\|x_i + y_j\|.$$

Si E es un espacio estable entonces es débilmente estable. Ésto es consecuencia del hecho de que todo subconjunto débil compacto de un Banach es acotado, lo que a su vez es un corolario del teorema de Banach-Steinhaus (ver [32, teorema 3.15, p. 69]).

Resulta complicado trabajar con familias arbitrarias, por lo que nuestros primeros resultados van encaminados a mostrar que en la definición anterior podemos sustituir los conjuntos I y J por $\mathbb{N}$.

Lema 4.2.2. *Sean $(x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J} \subseteq E$ sucesiones acotadas y $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ ultrafiltros no triviales sobre I y J respectivamente. Supongamos que R_1, R_2 son números reales tales que*

$$\lim_{i,\mathscr{U}}\lim_{j,\mathscr{V}}\|x_i + y_j\| < R_1 < R_2 < \lim_{j,\mathscr{V}}\lim_{i,\mathscr{U}}\|x_i + y_j\|.$$

Entonces existen $(i_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq I$ y $(j_t)_{t\in\mathbb{N}} \subseteq J$ verificando

$$\|x_{i_k} + y_{j_t}\| < R_1 \text{ si } k \leq t \qquad \|x_{i_k} + y_{j_t}\| > R_2 \text{ si } k > t. \tag{4.4}$$

Demostración. Usando la definición de límite a través de un ultrafiltro,

$$I_0 = \{i \in I : \lim_{j,\mathscr{V}}\|x_i + y_j\| < R_1\} \in \mathscr{U}; \quad \forall i \in I_0 \left(\ J^i := \{j \in J : \|x_i + y_j\| < R_1\} \in \mathscr{V}\right)$$

$$J_0 = \{j \in J : \lim_{i,\mathscr{U}} \|x_i + y_j\| > R_2\} \in \mathscr{V}; \quad \forall j \in J_0 \ \left(I^j = \{i \in I : \|x_i + y_j\| > R_2\} \in \mathscr{U}\right).$$

Vamos a construir de manera inductiva las sucesiones $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del enunciado. En el primer paso tomamos $i_1 \in I_0$, $j_1 \in J_0 \cap J^{i_1}$. Notar que cumplen $\|x_{i_1} + y_{j_1}\| < R_1$. Supongamos que hemos construido $i_1, \dots, i_n$ y $j_1, \dots, j_n$ de modo que:

1. Los elementos $(i_k)_{k=1}^n$ (resp. $(j_t)_{t=1}^n$) son distintos dos a dos.
2. $i_k \in I_0 \cap I^{j_1} \cap \dots \cap I^{j_{k-1}}$ $(k = 1, \dots, n)$ y $j_t \in J_0 \cap J^{i_1} \cap \dots \cap J^{i_t}$ $(t = 1, \dots, n)$.

Entonces definimos i_{n+1}, j_{n+1} del siguiente modo:

$$i_1, \dots, i_n \neq i_{n+1} \in I_0 \cap I^{j_1} \cap \dots \cap I^{j_n}$$

$$j_1, \dots, j_n \neq j_{n+1} \in J_0 \cap J^{i_1} \cap \dots \cap J^{i_n} \cap J^{i_{n+1}}.$$

Obviamente $(i_k)_{k=1}^{n+1}$ y $(j_t)_{t=1}^{n+1}$ verifican las condiciones 1 y 2. Para las sucesiones $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(j_t)_{t\in\mathbb{N}}$ así obtenidas, si $k \le t$ entonces $j_t \in J^{i_k}$, de modo que $\|x_{i_k} + y_{j_t}\| < R_1$. Por otro lado, si $k > t$ entonces $i_k \in I^{j_t}$, luego $\|x_{i_k} + y_{j_t}\| > R_2$. □

A continuación se exponen varias equivalencias a la noción de espacio de Banach débilmente estable. La observación más remarcable al respecto es el hecho de que para dar la definición de débilmente estable, se pueden sustituir las familias arbitrarias por sucesiones; incluso la condición de estabilidad débil se puede sustituir por otra en la que no interviene la noción de ultrafiltro. Aunque esta última equivalencia resulta útil para verificar que determinados espacios de Banach son o no débilmente estables, la versión con ultrafiltros es mucho más cómoda para desarrollar la teoría que desemboca en el resultado de Krivine y Maurey.

Proposición 4.2.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *E es débilmente estable.*

(ii) *Para cada par de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ contenidas en un débil compacto y cualquier par de ultrafiltros no principales $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ sobre $\mathbb{N}$ se tiene*

$$\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x_n + y_m\| = \lim_{m,\mathscr{V}} \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n + y_m\|. \tag{4.5}$$

(iii) *Para cualquier par de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ contenidas en un débil compacto de E existen dos ultrafiltros no principales $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ sobre $\mathbb{N}$ tales que*

$$\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x_n + y_m\| = \lim_{m,\mathscr{V}} \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n + y_m\|.$$

(iv) *Para cualquier par de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ contenidas en un débil compacto de E se verifica*

$$\sup_{n<m} \|x_n + y_m\| \ge \inf_{n>m} \|x_n + y_m\|.$$

La proposición también es cierta cuando (i) se sustituye por "E es estable" y en (ii), (iii) y (iv) se cambia la condición "contenidas en un débil compacto" por "acotadas".

Demostración. Las implicaciones (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) son claras.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Fijadas dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, existen ultrafiltros $\mathscr{U},\mathscr{V}$ sobre $\mathbb{N}$ tales que se satisface la ecuación (4.5). Para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\lim_{m,\mathscr{V}} \|x_{n_0}+y_m\| \leq \sup_{n_0<m} \|x_{n_0}+y_m\| \leq \sup_{n<m} \|x_n+y_m\|.$$

Por tanto,

$$\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x_n+y_m\| \leq \sup_{n<m} \|x_n+y_m\|.$$

Análogamente se prueba que

$$\lim_{m,\mathscr{V}} \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n+y_m\| \geq \inf_{n>m} \|x_n+y_m\|.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que no se verifica (i), entonces podemos encontrar un par de familias $(x_i)_{i\in I},(y_j)_{j\in J}$ contenidas en un subconjunto débil compacto de E y ultrafiltros no triviales $\mathscr{U},\mathscr{V}$ sobre I,J respectivamente tales que

$$\lim_{i,\mathscr{U}} \lim_{j,\mathscr{V}} \|x_i+y_j\| < \lim_{j,\mathscr{V}} \lim_{i,\mathscr{U}} \|x_i+y_j\|.$$

Fijando dos reales $R_1<R_2$ como en el enunciado del lema 4.2.2 y aplicando este mismo resultado obtenemos dos sucesiones $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}},(y_{j_t})_{t\in\mathbb{N}}$ (obviamente contenidas en el mismo subconjunto débil compacto de E) que verifican

$$\sup_{k\leq t} \|x_{i_k}+y_{j_t}\| \leq R_1 \qquad \text{y} \qquad \inf_{k>t} \|x_{i_k}+y_{j_t}\| \geq R_2.$$

Con ésto concluye la prueba. □

Veamos algunos ejemplos de espacios estables.

- *Todo espacio de Banach de dimensión finita es estable.*
  Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones acotadas en E y $\mathscr{U},\mathscr{V}$ ultrafiltros no triviales sobre $\mathbb{N}$. Puesto que todo conjunto acotado de E es relativamente compacto, existen $x=\lim_{n,\mathscr{U}} x_n, y=\lim_{m,\mathscr{V}} y_m$. Por tanto,

$$\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x_n+y_m\| = \|x+y\| = \lim_{m,\mathscr{V}} \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n+y_m\|.$$

- *Todo espacio de Hilbert H es estable.*
  Como consecuencia de la compacidad débil de la bola unidad de H, existen $x,y\in H$ tales que

$$\omega\text{-}\lim_{n,\mathscr{U}} x_n = x \quad \text{y} \quad \omega\text{-}\lim_{m,\mathscr{V}} y_m = y.$$

  Usando la identidad $\|a+b\|^2 = \|a\|^2+\|b\|^2+2\langle a,b\rangle$ tenemos que

$$\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x_n+y_m\|^2 = 2\langle x,y\rangle + \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n\|^2 + \lim_{m,\mathscr{V}} \|y_m\|^2$$

$$\lim_{m,\mathscr{V}} \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n+y_m\|^2 = 2\langle x,y\rangle + \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n\|^2 + \lim_{m,\mathscr{V}} \|y_m\|^2.$$

La siguiente proposición nos permite limitar nuestro estudio de estabilidad al caso de espacios separables.

Proposición 4.2.4. *Un espacio de Banach E es estable si y sólo si cada subespacio cerrado separable de E es estable.*

Demostración. Evidentemente si un espacio es estable entonces cualquier subespacio suyo lo es. Si E no fuese estable existirían dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ acotadas en E y dos ultrafiltros no triviales $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ en $\mathbb{N}$ tales que

$$\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x_n + y_m\| \neq \lim_{m,\mathscr{V}} \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n + y_m\|.$$

Ahora bien, la clausura del subespacio lineal $F = \overline{\mathrm{span}}\{x_n, y_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ generado por ambas sucesiones es un subespacio separable de E que no es estable. □

Como se ha comentado en la introducción, el concepto de espacio estable fue introducido por Krivine y Maurey en 1981 como una condición suficiente para garantizar que un espacio de Banach tuviera una copia de ℓ^p para algún $p \in [1, \infty)$. Sin embargo, esta respuesta no contemplaba en su totalidad la pregunta original que incluye la posibilidad de que el espacio contenga una copia de c_0, hasta el extremo de que si un espacio de Banach posee una copia de c_0 (subespacio isomorfo a c_0) entonces no es estable. Vamos a probar esta última afirmación.

Proposición 4.2.5. *Si E es un espacio de Banach que contiene una copia isomorfa a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ entonces E no es estable.*

Demostración. Hemos visto que us espacio era estable si y sólo si sus subespacios separables lo son, luego podemos suponer que E es isomorfo a c_0 y ver que no es estable. Fijemos $\varepsilon > 0$ tal que $(1+\varepsilon) < 2/(1+\varepsilon)$. Usando el lema 4.1.7 existe una sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que es $(1+\varepsilon)$-equivalente a la base canónica de c_0, $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Llamando $x_t = \sum_{k=1}^t y_k$ deducimos que si $t < k$ entonces

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \leq \|x_t + y_k\| \leq (1+\varepsilon),$$

y si $t \geq k$ entonces

$$2\frac{1}{1+\varepsilon} \leq \|x_t + y_k\| \leq 2(1+\varepsilon).$$

Usando al versión de la proposición 4.2.3 para Banach estables, tenemos que la elección de ε contradice (iv) de dicha proposición. Con ésto concluye la prueba. □

No probaremos aquí que el espacio c_0 es débilmente estable. Referimos al lector interesado a [7].

La estabilidad no es hereditaria por paso a cocientes. Ésto se puede probar viendo que cada espacio ℓ^p es estable (ver [66]) y usando que todo espacio de Banach separable (como c_0 con la norma del supremo) es isométricamente isomorfo a un cociente de ℓ^1 (ver [1, corolario 2.3.2]).

Por otro lado cabe destacar que la estabilidad depende esencialmente de la norma. De hecho, pequeñas perturbaciones en la norma de un espacio estable pueden provocar la pérdida de la estabilidad: Consideremos en ℓ^p la función

$$|||x||| = \|x\|_p + \varepsilon \text{ máx}\left\{(x_{2k}^p + x_{2t-1}^p)^{1/p}, k < t\right\}.$$

Se puede probar (ver [66]) que se trata de una norma en ℓ^p verificando

$$\|x\|_p \leq |||x||| \leq (1+\varepsilon)\|x\|_p.$$

Las sucesiones $x_n = e_{2n}, y_m = e_{2m-1}$ satisfacen que

$$|||x_n + y_m||| = 2^{1/p} + \varepsilon 2^{1/p} \text{ si } n < m$$

$$|||x_n + y_m||| = 2^{1/p} + \varepsilon \text{ si } n \geq m,$$

luego $\text{lím}_n \text{lím}_m |||x_n + y_m||| > \text{lím}_m \text{lím}_n |||x_n + y_m|||$.

En la siguiente sección comenzaremos a desarrollar la teoría sobre espacios débilmente estables. Como hemos comentado en la introducción, D. J. H. Garling e (independientemente) S. Argyros, S. Negrepontis y Th. Zachariades introdujeron la clase de los espacios de Banach débilmente estables extendiendo los resultados de Krivine y Maurey a un marco más general que sí incluía a c_0. Aunque existe un cierto paralelismo entre los resultados obtenidos para espacios estables y para los espacios débilmente estables, esta última condición conlleva graves complicaciones cuando uno intenta reproducir el mismo tipo de resultados que desarrollaron Krivine y Maurey para el caso estable. Ello obliga a usar herramientas y resultados avanzados de teoría de espacios de Banach, muchos de los cuales se deben a Rosenthal, quien desarrolló ideas y conceptos que aparecerán en las próximas secciones aunque con fines distintos a los que nosotros perseguimos.

4.3. El espacio de tipos

Fijemos un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ separable. Nuestro primer objetivo es probar el siguiente teorema:

Teorema 4.3.1. *Existe un espacio métrico completo $(T(E), \rho)$ localmente compacto y un homeomorfismo t de E en un subespacio denso de $(T(E), \rho)$. Además un subconjunto A de E es acotado si y sólo si $t[A]$ es relativamente compacto.*

Un espacio $T(E)$ como en el teorema anterior es *hemicompacto*, esto es, admite una sucesión de subconjuntos compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que cualquier otro subconjunto compacto K de $T(E)$ está contenido en uno de los conjuntos de la sucesión.

Fijado un elemento x_0 de E, la familia $E_n = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ es una sucesión fundamental de conjuntos acotados, es decir, $A \subseteq E$ es acotado si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq E_n$. Vamos a mostrar que $\{\overline{t[E_n]} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de compactos con la propiedad descrita antes: supongamos por reducción al absurdo que $K \subseteq T(E)$ es un subconjunto compacto con $K \not\subseteq \overline{t[E_n]}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces existirá $p_n \in K \setminus \overline{t[E_n]}$, y por densidad podemos encontrar $t(x_n) \in T(E) \setminus \overline{t[E_n]}$ tal que $\rho(p_n, t(x_n)) \leq 1/n$. La sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ así construida está contenida en el compacto K, y podemos suponer que converge hacia $p \in K$ (tomando subsucesión), de modo que también $t(x_n)$ converge hacia p. De este modo, $\{t(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto relativamente compacto de $(T(E), \rho)$, y por tanto, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Deducimos que existe n_0 tal que E_{n_0} contiene a esta sucesión lo que es absurdo.

Obviamente todo espacio hemicompacto es σ-compacto, i.e., es unión numerable de subconjuntos compactos. Como consecuencia $(T(E), \rho)$ es separable por ser unión numerable de compactos métricos (separables). Como en espacios métricos la propiedad de ser separable es hereditaria, $t[E]$, y por tanto, $(E, \|\cdot\|)$ debe ser separable (lo que explica el por qué hemos comenzado esta sección suponiendo esta hipótesis).

Observación 4.3.2. *Si bien nuestro objetivo es introducir el espacio de Banach E es un espacio métrico con ciertas propiedades, el recíproco es un problema que se aborda*

Un *espacio polaco* es un espacio topológico separable y metrizable con una métrica completa. La topología producto $(\mathbb{R}^E, \tau_p)$ la denominaremos también topología de la convergencia puntual por razones obvias.

Lema 4.3.3. *El espacio* $\lambda_1(E) := \{f : E \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|, \text{ para cada } x, y \in E\}$ *dotado de la topología de la convergencia puntual es polaco, localmente compacto y* σ*-compacto*

Demostración. Sea $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto contable denso de E. Definimos la aplicación $\phi : (\lambda_1(E), \tau_p) \to (\lambda_1(D), \tau_p)$ que lleva cada función $f \in \lambda_1(E)$ a su restricción sobre D, $f|_D$. Obviamente se trata de una aplicación continua.

Notemos ϕ es una aplicación inversible: como las funciones $f : D \to \mathbb{R}$ son Lipschitzianas, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en D entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ también lo será en $\mathbb{R}$. De este modo, para extender f a una aplicación $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ definimos $\tilde{f}(x)$ como el $\lim_n f(x_n)$ para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en D que converja a x. No depende de la sucesión que elijamos pues si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión que también converge hacia x entonces la sucesión intercalada $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ será de Cauchy; luego $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots$ también será de Cauchy como comentábamos antes, y se deduce que $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(y_n)$. Para ver que la extensión pertenece efectivamente a $\lambda_1(E)$, basta notar que la desigualdad $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \|x - y\|$ se cumple para cada $x, y \in D$ y usar la definición de $\tilde{f}$. Observar también que la función $\tilde{f}$ que extiende a f es única por la proposición 2.1.2. La asignación $f \to \tilde{f}$ nos da la aplicación inversa de ϕ.

Además ϕ^{-1} es continua, ya que si $W = \{h \in \lambda_1(E) : |h(x_i) - \tilde{g}(x_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, m\}$ es un entorno de $\tilde{g} \in \lambda_1(E)$ y tomamos $t_i \in D$ con $\|x_i - t_i\| < \varepsilon/3$, entonces

$$\phi^{-1}[\{f \in \lambda_1(D) : |f(t_i) - g(t_i)| < \varepsilon/3 \text{ para } i = 1, \ldots, m\}] \subseteq W$$

pues

$$|\tilde{f}(x_i) - \tilde{g}(x_i)| \leq |\tilde{f}(x_i) - \tilde{f}(t_i)| + |\tilde{f}(t_i) - \tilde{g}(t_i)| + |\tilde{g}(t_i) - \tilde{g}(x_i)| \leq 2\|x_i - t_i\| + |f(t_i) - g(t_i)| < \varepsilon.$$

Por tanto, ϕ es un homeomorfismo y los espacios $(\lambda_1(E), \tau_p)$ y $(\lambda_1(D), \tau_p)$ son topológicamente identificables.

Ahora bien, sabemos que $(\mathbb{R}^D, \tau_p)$ es un espacio metrizable pues D es numerable, luego $(\lambda_1(E), \tau_p)$ es también metrizable a través del homeomorfismo ϕ. Además se tienen las siguientes observaciones:

- $\lambda_1(E)$ es completo: Primero veamos que $\lambda_1(D)$ es cerrado en $\mathbb{R}^D$. En efecto, si $g \in \overline{\lambda_1(D)}$ entonces existe una sucesión $(g_n)_{n\in D}$ de elementos de $\lambda_1(D)$ convergiendo hacia g puntualmente. Por tanto, si $x, y \in D$ entonces $|g(x) - g(y)| = \lim_n |g_n(x) - g_n(y)| \leq \|x - y\|$. Así pues, $\lambda_1(D)$ es completo y por el homeomorfismo ϕ (convertido en isometría al inducir la métrica de $\lambda_1(D)$ en $\lambda_1(E)$) deducimos que $(\lambda_1(E), \tau_p)$ también es completo.
- $\lambda_1(E)$ es localmente compacto: Sea $f \in \lambda_1(E)$ y consideremos un entorno de f de la forma

  $$W = \{g \in \lambda_1(E) : |g(x) - f(x)| < \varepsilon\} \text{ para cierto } x \in E.$$

  Entonces W es relativamente compacto puesto que para cada $y \in E$

  $$|g(y) - f(y)| \leq 2\|x - y\| + |g(x) - f(x)| < 2\|x - y\| + \varepsilon =: \delta_y,$$

  lo que implica

  $$W \subseteq \prod_{y\in X} [f(y) - \delta_y, f(y) + \delta_y]$$

  donde el miembro de la derecha es compacto por el teorema de Tychonoff.
- $\lambda_1(E)$ es σ-compacto: fijado $x_0 \in X$, el conjunto $A_n = \{f \in \lambda_1(E) : |f(x_0)| \leq n\}$ es un conjunto relativamente compacto (por el punto anterior) y trivialmente cerrado. Es claro que la unión de todos estos conjuntos es $\lambda_1(E)$.

□

Lema 4.3.4. *La aplicación $t : E \to \lambda_1(E)$ que asigna a cada $a \in X$ la función $t(a) = t_a : E \to \mathbb{R}$ dada por $t_a(x) = \|x + a\|$, es un homeomorfismo en la imagen.*

Demostración. En primer lugar, la aplicación t está bien definida pues la desigualdad triangular garantiza que t_a es un elemento de $\lambda_1(E)$.

Es inyectiva, ya que si $t_a = t_b$ entonces $t_b(-a) = t_a(-a) = 0$ implica $a = b$; y continua, pues $|t_a(z) - t_b(z)| \leq \|a - b\|$ por la desigualdad triangular. Veamos ahora que la inversa t^{-1} sobre la imagen también es continua. Como ambos espacios E y $\lambda_1(E)$ son métricos, podemos usar la caracterización de continuidad por sucesiones. Sea $\{t(a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $t[E]$ que converge puntualmente hacia t_a. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $\|a_n - a\| = |t_{a_n}(-a) - t_a(-a)| < \varepsilon$. □

Ya estamos en condiciones de probar el teorema 4.3.1.

Demostración del teorema 4.3.1. Para la aplicación t del lema anterior consideremos $T(E) := \overline{t[E]} \subseteq \lambda_1(E)$ con la métrica inducida ρ de $\lambda_1(E)$. Notar que $T(E)$ es subespacio topológico cerrado de $\lambda_1(E)$, de modo que sigue siendo localmente compacto y polaco. Queda probar la última afirmación.

Supongamos que A es un subconjunto acotado de X. Fijemos $x_0 \in E$ y $r > 0$ tales que $A \subseteq B(x_0, r)$. Si $x \in E$ y $a \in A$ tendremos que $|t_a(x) - t_{x_0}(x)| \leq \|a - x_0\| < r$. Por tanto

$$t[A] \subseteq \prod_{x \in E} [t_{x_0}(x) - r, t_{x_0}(x) + r]$$

y el teorema de Tychonoff nos garantiza que $\overline{t[A]}$ es compacto. Recíprocamente, si $t[A]$ es relativamente compacto en $T(E)$ entonces $\overline{t[A]}$ está contenido en un conjunto de la forma $\{f \in T(E) : f(0) < m\}$ para cierto $m \in \mathbb{N}$. De este modo $\|a\| = t_a(0) < m$ para cada $a \in A$, lo que muestra que A es acotado.

Definición 4.3.5. *El espacio $(T(E), \rho)$ obtenido en el teorema 4.3.1 se denomina* espacio de tipos asociado a $(E, \|\cdot\|)$. *Los elementos de $T(E)$ se denominan* tipos sobre E . *Para cada $a \in E$ el elemento $\sigma_a = t_a$ se denomina* tipo realizado por a .

A menudo identificaremos $E \subseteq T(E)$ asociando a cada elemento $a \in E$ el correspondiente tipo realizado por a.

Vamos a dar una descripción de estos tipos en términos de ultrafiltros.

Dado un tipo $s \in T(E) = \overline{t[E]}$ existe una sucesión $(t_{x_n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq t[E]$ que converge (en la métrica ρ, o equivalentemente, en la topología puntual) hacia s. En otras palabras, $s(x) = \text{lím}_n \|x + x_n\|$ para cada $x \in E$. En tales condiciones decimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una *sucesión aproximante* de s. Como $\{t_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada (teorema 4.3.1).

Por otro lado, partiendo de una sucesión acotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no podemos garantizar que sea la sucesión aproximante de algún tipo, pues el límite $\text{lím}_n \|x + x_n\| = \text{lím}_n t_{x_n}(x)$ podría no existir para algún x; es decir, la sucesión t_{x_n} no tiene por qué converger en T. No obstante, sabemos que $\{t_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto, de modo que fijado un ultrafiltro libre $\mathscr{U}$ sobre $\mathbb{N}$, el límite de la sucesión a través del ultrafiltro $\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} t_{x_n} \in \overline{t[E]} = T$ es un tipo sobre E. Dicho tipo verifica $\sigma(x) = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} \|x_n + x\|$ para cada $x \in X$.

Observar que todo tipo σ se puede escribir de esta forma: basta considerar una sucesión aproximante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para σ (que hemos probado que existen) y cualquier ultrafiltro libre $\mathscr{U}$ sobre $\mathbb{N}$, pues $\sigma(x) = \text{lím}_n \|x_n + x\| = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} \|x_n + x\|$.

Teorema 4.3.6. *Una aplicación $s : X \to [0, +\infty)$ es un tipo si y sólo si existe una sucesión acotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y un ultrafiltro $\mathscr{U}$ libre sobre $\mathbb{N}$ tal que*

$$\forall x \in X \qquad s(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n + x\| \;\; (\textit{ i.e. } s = \lim_{n,\mathscr{U}} t_{x_n} = \lim_{n,\mathscr{U}} x_n)$$

En ese caso, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que es aproximante para σ.

Demostración. La primera parte ha sido probada en la discusión que precede al enunciado. Para ver la última afirmación, observemos que como s pertenece a la adherencia de $\{t_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ y T es un espacio metrizable, existe una subsucesión $(t_{x_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente hacia s. Deducimos que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es sucesión aproximante para s. $\square$

Definición 4.3.7. *Diremos que $\tau \in T(E)$ es un* tipo débil *sobre E si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en un débil compacto y un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$ tales que*

$$\tau(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n + x\| \text{ para cada } x \in E.$$

El conjunto de tipos débiles se denota por $T_\omega(E)$.

Siempre se verifica $E \subseteq T_\omega(E) \subseteq T(E)$.

Observar que si τ es un tipo sobre E entonces $\tau \in T_\omega(E)$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente hacia un cierto $y \in E$ y tal que $\tau(x) = \lim_n \|x_n + x\|$ para todo $x \in E$. Obviamente, la última condición implica la primera pues $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ es ω-compacto. Para el recíproco basta extraer una subsucesión aproximante para τ y de ella extraer otra subsucesión que converja débilmente, lo que es posible ya que la primera está contenida en un ω-compacto (que es sucesionalmente ω-compacto por el teorema de Eberlein-Šmulian, ver [32, teorema 3.59, p. 85]). Por tanto,

$$T_\omega(E) = \{\tau \in T(E) : \text{ existe } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E \ \omega\text{-convergente tal que } \tau(x) = \lim_n \|x_n + x\| \text{ para cada } x \in E\}$$

Nos resultará de gran interés el siguiente subconjunto de $T_\omega(E)$.

Definición 4.3.8. *Un tipo $\tau \in T(E)$ se dice que es un* tipo débilmente nulo *si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente hacia 0 y verifica verifica $\tau(x) = \lim_n \|x_n + x\|$ para cada $x \in E$.*

El conjunto de tales tipos se denota por $T_{\omega n}(E)$, es decir,

$$T_{\omega n}(E) = \{\tau \in T(E) : \text{ existe } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E \text{ tal que } \omega\text{-}\lim_n x_n = 0 \text{ y } \tau(x) = \lim_n \|x_n + x\| \text{ para cada } x \in E\}.$$

4.3.1. Operaciones sobre los tipos

Hemos identificado E con un subconjunto de $T_\omega(E) \subseteq T(E)$ asociando a cada elemento $a \in E$ el tipo σ_a. En este sentido, vamos a discutir cuándo podemos extender las operaciones suma y producto por escalares de E al resto de tipos.

Definición 4.3.9. *Dado un tipo σ sobre E y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos la aplicación $\lambda\sigma$ del siguiente modo:*

- *Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda\sigma$ es el tipo trivial o cero, esto es, el tipo σ_0 definido por $\sigma_0(x) = \|x\|$ para cada $x \in X$).*
- *Si $\lambda \neq 0$ entonces $(\lambda\sigma)(x) := |\lambda|\sigma(x/\lambda)$ para cada $x \in X$.*

Observemos que si $\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} a_n$ entonces

$$(\lambda\sigma)(x) = |\lambda|\sigma\left(\frac{x}{\lambda}\right) = |\lambda| \lim_{n,\mathscr{U}} \left\|\frac{x}{\lambda} + a_n\right\| = \lim_{n,\mathscr{U}} \|x + \lambda a_n\| = \lim_{n,\mathscr{U}} \sigma_{\lambda a_n}(x).$$

Por tanto, $\lambda\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} \lambda a_n$ lo que garantiza que $\lambda\sigma \in T(E)$. Además el razonamiento anterior muestra que $\lambda\sigma_a = \sigma_{\lambda a}$, con lo que esta operación efectivamente extiende a la operación producto por escalares de E. Por otro lado, si a_n es débil convergente hacia $\alpha \in E$ entonces λa_n converge débilmente hacia $\lambda\alpha$. En particular, si $\sigma \in T_\omega(E)$ (resp. $T_{\omega n}(E)$) entonces $\lambda\sigma \in T_\omega(E)$ (resp. $T_{\omega n}(E)$).

Cuando tratamos de extender la suma necesitamos condiciones adicionales:

- Si E es un espacio débilmente estable entonces la operación suma se puede extender al espacio de tipos débiles $T_\omega(E)$ mediante el producto de convolución.
- Si además E es estable entonces podemos extender el producto de convolución a todo el espacio de tipos $T(E)$.

Damos la definición del producto de convolución de tipos.

Definición 4.3.10. *Sea E un espacio de Banach débilmente estable (resp. estable); $\sigma, \tau \in T_\omega(E)$ (resp. $T(E)$) dados por $\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} a_n$ y $\tau = \text{lím}_{m,\mathscr{V}} b_m$ donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en E contenidas en un conjunto débil compacto (resp. acotado) y $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ son ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$. Denominamos* producto de convolución *de σ y τ a la aplicación $\sigma * \tau : E \to [0, +\infty)$ dada por*

$$(\sigma * \tau)(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|a_n + b_m + x\| = \lim_{n,\mathscr{U}} \tau(a_n + x).$$

Comprobamos primero que la aplicación está bien definida en el caso E débilmente estable, es decir, que no depende de las sucesiones ni de los ultrafiltros libres que hayamos fijado. Supongamos que $((a'_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathscr{U}')$ y $((b'_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathscr{V}')$ son sucesiones en E (cada una contenida en un débil compacto) y ultrafiltros que también determinan σ y τ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|a_n + b_m + x\| &= \lim_{n,\mathscr{U}} \tau(a_n + x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}'} \|a_n + b'_m + x\| \\
&= \lim_{m,\mathscr{V}'} \lim_{n,\mathscr{U}} \|a_n + b'_m + x\| \text{ (estabilidad débil)} \\
&= \lim_{m,\mathscr{V}'} \sigma(b'_m + x) = \lim_{m,\mathscr{V}'} \lim_{n,\mathscr{U}'} \|a'_n + b'_m + x\| \\
&= \lim_{n,\mathscr{U}'} \lim_{m,\mathscr{V}'} \|a'_n + b'_m + x\| \text{ (estabilidad débil)}
\end{aligned}$$

La prueba del caso E estable es enteramente análoga, cambiando simplemente sucesiones contenidas en un débil compacto por sucesiones acotadas en el razonamiento anterior, y usando estabilidad donde usábamos estabilidad débil.

Una observación que usaremos a menudo, es que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente convergente en E que verifica $\sigma(x) = \text{lím}_n a_n$ y $\tau = \text{lím}_{m,\mathscr{V}} b_m$ entonces el producto de convolución

$$(\sigma * \tau)(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|a_n + b_m + x\|$$

no depende del ultrafiltro libre $\mathscr{U}$ que hayamos elegido, pues siempre será $\sigma = \lim_{n,\mathscr{U}} a_n$ para cualquier ultrafiltro libre $\mathscr{U}$ sobre $\mathbb{N}$. De este modo

$$(\sigma * \tau)(x) = \lim_n \lim_{m,\mathscr{V}} \|a_n + b_m + x\|.$$

Si además $\tau(x) = \lim_m \|b_m + x\|$ para cada $x \in E$ (i.e. $\tau = \lim_m b_m$) entonces de la desigualdad anterior se deduce que

$$(\sigma * \tau)(x) = \lim_n \tau(a_n + x) = \lim_n \lim_m \|a_n + b_m + x\|.$$

Además de estar $\sigma * \tau$ bien definida, también es claro que la estabilidad débil implica que dicha operación es conmutativa, $\sigma * \tau = \tau * \sigma$ para todo par de tipos débiles. Notemos que si $a, b \in E$ entonces $\sigma_a * \sigma_b = \sigma_{a+b}$, con lo cual el producto de convolución extiende la operación suma. Para comprobar que efectivamente se trata de una operación tenemos que ver que la convolución de dos tipos débiles es un tipo débil (caso débilmente estable).

Proposición 4.3.11. *1. Si E es débilmente estable entonces el producto de convolución $T_\omega(E) \times T_\omega(E) \to T_\omega(E)$ es una operación bien definida. Además $T_{\omega n}(E)$ es cerrado para la convolución.*
2. Si además E es estable entonces el producto de convolución es una operación bien definida $T(E) \times T(E) \to T(E)$.

Demostración. Supongamos que E es estable. Sabemos que el producto de convolución $\sigma * \tau$ de dos tipos $\sigma, \tau \in T(E)$ es un elemento de $\mathbb{R}_+^E$ bien definido. Veamos que efectivamente $\sigma * \tau \in T(E)$.

- Si $\sigma = \sigma_a$ y $\tau = \sigma_b$ entonces $(\sigma_a * \sigma_b)(x) = \|a + b + x\| = \sigma_{a+b}(x)$, luego $\sigma * \tau \in T(E)$.
- Si $\sigma = \lim_{n,\mathscr{U}} a_n$ y $\tau = \sigma_b$ entonces

  $$(\sigma * \tau)(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \|a_n + b + x\| \text{ para cada } x \in E.$$

  De este modo $\sigma * \tau = \lim_{n,\mathscr{U}} (a_n + b) \in T(E)$.
- Si $\sigma = \lim_{n,\mathscr{U}} a_n$, $\tau = \lim_{m,\mathscr{V}} b_m$ entonces para cada $x \in E$ tenemos

  $$(\sigma * \tau)(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \tau(a_n + x) = \lim_{n,\mathscr{U}} (\tau * \sigma_{a_n})(x),$$

  de modo que $\sigma * \tau = \lim_{n,\mathscr{U}} (\tau * \sigma_{a_n}) \in T(E)$ pues $(\tau * \sigma_{a_n}) \in T(E)$ para cada n y $T(E)$ es subespacio cerrado.

Ésto prueba 2. Para ver 1, reproduciendo el mismo razonamiento anterior se comprueba que si $\sigma, \tau \in T_\omega(E)$ entonces $\sigma * \tau \in T(E)$, aunque no podemos afirmar que pertenece a $T_\omega(E)$ directamente pues este último subconjunto no está claro que sea cerrado. Pero se puede probar que efectivamente es un tipo débil con un poco más de esfuerzo.

- Si $\sigma,\tau \in T_\omega(E)$ entonces $\sigma * \tau \in T_\omega(E)$: Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes débilmente hacia a y b respectivamente, tales que $\sigma = \text{lím}_n a_n, \tau = \text{lím}_m b_m$. Fijemos un subconjunto numerable $D = \{d_k : k \in \mathbb{N}\}$ denso en E y $l \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{U},\mathcal{V}$ son ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$ cualesquiera entonces

$$(\sigma * \tau)(d_k) = \lim_{n,\mathcal{U}} \lim_{m,\mathcal{V}} \|a_n + b_m + d_k\|$$

para cada $k \in \{1,...,l\}$, luego el conjunto

$$A_k^l = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \lim_{m,\mathcal{V}} \|a_n + b_m + d_k\| - (\sigma * \tau)(d_k) \right| < 1/l \right\}$$

pertenece a $\mathcal{U}$. Elegimos $n_l \in \bigcap_{k=1}^l A_k^l \in \mathcal{U}$.
Análogamente para cada $k \in \{1,...,l\}$ el conjunto

$$B_k^l = \{m \in \mathbb{N} : |(\sigma * \tau)(d_k) - \|a_{n_l} + b_m + d_k\|| < 1/l\}$$

pertenece a $\mathcal{V}$. Elegimos $m_l \in \bigcap_{k=1}^l B_k \in \mathcal{V}$.
La sucesión $z_l = x_{n_l} + y_{m_l}$ es débilmente convergente hacia $a+b$. Además

$$|(\sigma * \tau)(d_k) - \|x_{n_l} + y_{n_l} + d_k\|| < 1/l$$

si $k = 1,...,l$ y $l \in \mathbb{N}$, lo que significa que para cada $z \in D$ es

$$(\sigma * \tau)(z) = \lim_l \|z + x_{n_l} + y_{n_l}\|.$$

Vamos a ver que podemos extender la igualdad anterior para cualquier $x \in X$. Fijado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$ y tomamos $z \in D$ con $\|x - z\| < \varepsilon/2$. Se deduce

$$\begin{aligned} |\sigma(x) - \|x + x_{n_l} + y_{n_l}\|| &\leq |\sigma(x) - \sigma(z)| + |\sigma(z) - \|z + x_{n_l} + y_{n_l}\|| \\ &+ |\|z + x_{n_l} + y_{n_l}\| - \|x + x_{n_l} + y_{n_l}\|| \\ &\leq 2\|x - z\| + |\sigma(z) - \|z + x_{n_l} + y_{n_l}\|| \end{aligned}$$

usando que $\sigma \in \lambda_1(E)$ y la desigualdad triangular. Tomando límite superior en l obtenemos que

$$\limsup_l |\sigma(x) - \|x + x_{n_l} + y_{n_l}\|| \leq \varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$, luego dicho límite superior vale cero, que debe coincidir necesariamente con el límite inferior al ser una sucesión no negativa. Por tanto, existe el límite y vale cero, como queríamos probar.
- Si $\sigma,\tau \in T_{\omega n}(E)$ entonces $\sigma * \tau \in T_{\omega n}(E)$: La prueba es la misma que el caso anterior pues $x_{n_l} + y_{n_l}$ converge débilmente hacia $0+0=0$.

□

Supongamos que σ y τ son dos tipos para los cuales podemos definir el producto de convolución. Si podemos escribir $\sigma = \lim_{n,\mathscr{U}} a_n$, $\tau = \lim_{m,\mathscr{V}} b_m$, es razonable pensar que vamos a poder dar una representación similar de su producto $\sigma * \tau = \lim_{k,\mathscr{W}} c_k$ donde el ultrafiltro $\mathscr{W}$ y la sucesión c_k se podrán construir de una manera "apropiada" a partir de las sucesiones y ultrafiltros que representan a σ y τ.

La siguiente proposición permite obtener ultrafiltros en el espacio producto (con un número finito de factores) a partir de ultrafiltros sobre cada uno de los factores.

Lema 4.3.12. *Sean $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ ultrafiltros no triviales sobre X, Y respectivamente. Entonces*

$$\mathscr{U} \times \mathscr{V} = \{A \subseteq X \times Y : \{x \in X : \{y \in Y : (x,y) \in A\} \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}\}$$

es un ultrafiltro no trivial sobre $X \times Y$ que contiene a los conjuntos de la forma $U \times V$ con $U \in \mathscr{U}, V \in \mathscr{V}$.

Demostración. Comencemos viendo que es un filtro. Sean $A \subseteq B$ subconjuntos de $X \times Y$ tales que $A \in \mathscr{U} \times \mathscr{V}$. Fijado $x \in X$ se tiene que $C_{x,A} = \{y \in Y : (x,y) \in A\} \subseteq C_{x,B} = \{y \in Y : (x,y) \in B\}$, de modo que $\{x \in X : C_{x,A} \in \mathscr{V}\} \subseteq \{x \in X : C_{x,B} \in \mathscr{V}\}$. Como el primer conjunto pertenece a $\mathscr{U}$ entonces el segundo también.

Si $A, B \in \mathscr{U} \times \mathscr{V}$ entonces $C_{x,A\cap B} = C_{x,A} \cap C_{x,B}$ siguiendo con la notación anterior, lo que permite deducir que $A \cap B \in \mathscr{U} \times \mathscr{V}$. El conjunto vacío no pertenece a $\mathscr{U} \times \mathscr{V}$ pues $C_{x,\emptyset} = \emptyset$ para cada $x \in X$.

Sea A un subconjunto de $X \times Y$. Si $A \notin \mathscr{U} \times \mathscr{V}$ entonces eso significa que $\{x \in X : C_{x,A} \in \mathscr{V}\} \notin \mathscr{U}$, luego su complementario $\{x \in X : C_{x,A} \notin \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}$. Pero notemos que $C_{x,A} \notin \mathscr{V}$ es equivalente a decir que $C_{x,A^c} = (C_{x,A})^c \in \mathscr{V}$. Por tanto nos queda

$$\{x \in X : C_{x,A^c} \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U},$$

lo que significa que $A^c \in \mathscr{U} \times \mathscr{V}$.

Si $U \in \mathscr{U}, V \in \mathscr{V}$ entonces el conjunto $A = U \times V$ verifica que $C_{x,A} = V$ si $x \in U$ o $C_{x,A} = \emptyset$ si $x \notin U$. De este modo

$$\{x \in X : C_{x,A} \in \mathscr{U}\} = U \in \mathscr{U}$$

y deducimos que $A = U \times V \in \mathscr{U} \times \mathscr{V}$.

Finalmente, el hecho de que $\mathscr{U} \times \mathscr{V}$ sea no trivial se debe a que dado $(x_0, y_0) \in X \times Y$, podemos tomar $U \in \mathscr{U}$ y $V \in \mathscr{V}$ con $x_0 \notin U, y_0 \notin V$ por ser estos ultrafiltros no triviales. Así pues, $(x_0, y_0) \notin U \times V$ pero $U \times V \in \mathscr{U} \times \mathscr{V}$ como hemos probado antes. □

Observación 4.3.13. *Remarcar que el ultrafiltro $\mathscr{U} \times \mathscr{V}$ definido en el lema anterior no está generado por la base de filtro $\{A \times B : A \in \mathscr{U}, B \in \mathscr{V}\}$. Por ejemplo, si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ entonces $\mathscr{U} \times \mathscr{U}$ tiene el conjunto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{n\} \times \{n, n+1, \dots\})$ entre sus elementos, ya que*

$$\{x \in \mathbb{N} : \{y \in \mathbb{N} : (x,y) \in A\} \in \mathscr{U}\} = \{x \in \mathbb{N} : \{x, x+1, \dots\} \in \mathscr{U}\} = \mathbb{N} \in \mathscr{U}.$$

Sin embargo, A no contiene ningún subconjunto de la forma $U \times V$ para $U, V \in \mathscr{U}$; ya que $U \times V$ siempre contiene un elemento de la forma (x,y) con $x > y$ al ser U, V conjuntos infinitos.

Proposición 4.3.14. *Sea E un espacio de Banach estable, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones acotadas y $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$ que determinan los tipos $\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}}\, a_n$ y $\tau = \text{lím}_{m,\mathscr{V}}\, b_m$. Dada una biyección $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y considerando el ultrafiltro no trivial (ver lema 4.3.12)*

$$\mathscr{U}\times\mathscr{V} = \{A \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \{n\in\mathbb{N} : \{m\in\mathbb{N} : (n,m)\in A\}\in\mathscr{V}\}\in\mathscr{U}\}$$

tenemos que $\mathscr{W} := \{g[A] : A\in\mathscr{U}\times\mathscr{V}\}$ es un ultrafiltro no trivial sobre $\mathbb{N}$. Definiendo $c_k := a_n + b_m$ si $k = g(n,m)$, se verifica $\sigma * \tau = \text{lím}_{k,\mathscr{W}}\, c_k$.

Si E es débilmente estable entonces el enunciado anterior sigue siendo cierto para tipos débiles, donde ahora las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ están contenidas en un débil compacto y además $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ está contenida en un débil compacto.

Demostración. La hipótesis de estabilidad o estabilidad débil sólo se usa para asegurar que el producto de convolución esté bien definido, de manera que la demostración es la misma en ambos casos.

Como $\mathscr{U}\times\mathscr{V}$ es ultrafiltro no trivial en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ y g es biyección es inmediato que $\mathscr{W}$ también será ultrafiltro no trivial en $\mathbb{N}$. Para la segunda parte, de la definición de $\mathscr{U}\times\mathscr{V}$ se sigue que

$$\lim_{n,\mathscr{U}}\lim_{m,\mathscr{V}} \|x + a_n + b_m\| = \lim_{(n,m),\mathscr{U}\times\mathscr{V}} \|x + a_n + b_m\|.$$

Por otro lado, la definición de $\mathscr{W}$ y c_k muestra que

$$\lim_{k,\mathscr{W}} \|x + c_k\| = \lim_{(n,m),\mathscr{U}\times\mathscr{V}} \|x + a_n + b_m\|.$$

Para ver la última afirmación del enunciado basta comprobar que si K_1, K_2 son conjuntos débilmente compactos tales que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K_1$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K_2$, entonces $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ también está contenida en un débil compacto. En efecto, tenemos $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq 2\,\overline{\text{co}}^{\omega}(K_1\cup K_2)$ ya que $a_n + b_m = 2(a_n/2 + b_m/2)$ pertenece a $2\,\overline{\text{co}}^{\omega}(K_1\cup K_2)$, y este último conjunto es débilmente compacto por el teorema de Krein (ver [32, teorema 3.58, p. 85]). □

4.3.2. Continuidad de la operación convolución

Finalizamos la sección estudiando propiedades de continuidad del producto de convolución. Si el espacio E es estable, el producto de convolución puede extenderse a todo el espacio de tipos $T(E)$ y se puede comprobar fácilmente que es separadamente continuo:

Proposición 4.3.15. *Si E es estable entonces la operación de convolución $T(E)\times T(E) \to T(E)$ es separadamente continua.*

Demostración. Fijado σ consideremos la aplicación $\tau \to \sigma * \tau$ definida de $T(E)$ en $T(E)$. Como trabajamos en espacios métricos podemos usar la caracterización por sucesiones: si τ_n converge hacia τ entonces $\sigma * \tau_n$ converge hacia $\sigma * \tau$. No obstante, ya que $\phi[E]$ es denso en $T(E)$ basta comprobarlo cuando la sucesión $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en dicho subconjunto. Sea $(\sigma_{b_n}) \subseteq \phi[E]$ de modo que $\text{lím}_n\, \sigma_{b_n} = \tau$. Entonces, para cada $x\in E$, $(\sigma * \sigma_{b_n})(x) = \sigma(b_n + x)$ y $(\sigma * \tau)(x) = \text{lím}_n\, \sigma(b_n + x)$ ya que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es aproximante para τ. Por tanto $\sigma * \sigma_{b_n}$ converge puntualmente hacia $\sigma * \tau$. □

Si ahora pensamos en el caso de un Banach débilmente estable, es razonable pensar que la operación convolución $T_\omega(E) \times T_\omega(E) \to T_\omega(E)$ va ser continua. Sin embargo, nos encontramos con el problema de que la prueba anterior para el caso estable no es válida. Como la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene por qué estar contenida en un débil compacto, no podemos escribir $(\sigma * \tau)(x) = \text{lím}_n\, \sigma(b_n + x)$.

Sin embargo, bajo condiciones adicionales y usando resultados más profundos, se puede probar la la operación producto de convolución restringida al espacio de tipos débilmente nulos $T_{\omega n}(E)$ es separadamente continua. Enunciamos dos resultados de Rosenthal [68] que son la clave para poder obtener lo que vamos buscando.

Lema 4.3.16. *Sea $(a_{i,j})_{i<j}$ ($i, j \in \mathbb{N}$) una familia de números reales tal que*

$$\text{lím}_i \text{lím}_j a_{i,j} = a.$$

Entonces existe una sucesión estrictamente creciente $k(1) < k(2) < k(3) < \ldots$ de enteros positivos verificando

$$\text{lím}_{i\to\infty, i<j} a_{k(i)k(j)} = a.$$

Lema 4.3.17. *Sea E un espacio de Banach que no contiene una copia isométrica de ℓ^1 y $(x_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ elementos en E verificando $\text{lím}_i \text{lím}_j x_{i,j} = 0$ en la topología débil de E. Entonces existe una sucesión $(i_n, j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $i_n < j_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{lím}_n i_n = \infty$ de manera que $\text{lím}_n k_{i_n, j_n} = 0$ en la topología débil de E.*

El siguiente lema nos será de gran ayuda para probar la continuidad separada.

Lema 4.3.18. *Supongamos que E es débilmente estable y ℓ^1 no está isométricamente contenido en E. Entonces, para cada tipo débil $\sigma \in T_\omega(E)$ tenemos que la función $\varphi_\sigma : T_{\omega n}(E) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi_\sigma(\tau) = (\sigma * \tau)(0)$ es continua.*

Demostración. Como $T_{\omega n}(E)$ es metrizable podemos usar la caracterización de continuidad en términos de sucesiones: si τ_n es una sucesión de tipos débilmente nulos que converge puntualmente hacia τ, entonces $(\sigma * \tau_n)(0)$ converge hacia $(\sigma * \tau)(0)$. Observar que la sucesión $(\sigma * \tau_n)(0)$ es acotada puesto que

$$0 \leq (\sigma * \tau_n)(0) \leq \sigma(0) + \tau_n(0).$$

Basta comprobar entonces que $(\sigma * \tau_n)(0)$ tiene a $(\sigma * \tau)(0)$ como único punto de aglomeración, es decir, que cualquier subsucesión $(\sigma * \tau_{n_k})(0)$ admite a su vez una subsucesión $(\sigma * \tau_{n_{k_p}})(0)$ que converge hacia $(\sigma * \tau)(0)$. Sin pérdida de generalidad supondremos que la subsucesión τ_{n_k} es la sucesión de partida τ_n.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, existe por definición una sucesión $(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de E que converge débilmente a 0 y verifica $\tau_n(x) = \text{lím}_k \|x + x_k^n\|$ para cada $x \in E$. Por la conmutatividad del producto de convolución tenemos que

$$(\sigma * \tau_n)(0) = (\tau_n * \sigma)(0) = \text{lím}_k \sigma(x_k^n).$$

De esta manera, tomando una subsucesión podemos asumir que

$$|(\sigma * \tau_n)(0) - \sigma(x_k^n)| \leq \frac{1}{n} \tag{4.6}$$

para cada $k,n \in \mathbb{N}$. Asimismo tenemos que

$$\tau(x) = \lim_n \tau_n(x) = \lim_n \lim_k \|x + x_k^n\| \text{ para todo } x \in E.$$

Afirmación: Existe una sucesión creciente $m(1) < m(2) < ...$ de manera que

$$\tau(x) = \lim_{i<j, i\to\infty} \|x + x_{m(j)}^{m(i)}\| \text{ para cada } x \in E.$$

Para ver la afirmación denotamos por $D = \{d_t : t \in \mathbb{N}\}$ a un subconjunto denso numerable de E. Para $t = 1$, el lema 4.3.16 nos permite obtener una sucesión $m^1(1) < m^1(2) < ...$ tal que

$$\tau(d_1) = \lim_{i<j, i\to\infty} \|d_1 + x_{m^1(j)}^{m^1(i)}\|.$$

Nos quedamos con $(m^1(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Volvemos a aplicar el mismo lema, ahora sobre $x_{m^1(j)}^{m^1(i)}$ para obtener $m^2(1) < m^2(2) < ...$ subsucesión de $m^1(1) < m^1(2) < ...$ verificando

$$\tau(d_2) = \lim_{i<j, i\to\infty} \|d_2 + x_{m^2(j)}^{m^2(i)}\|.$$

Notemos que también

$$\tau(d_1) = \lim_{i<j, i\to\infty} \|d_1 + x_{m^2(j)}^{m^2(i)}\|.$$

Reiteramos el proceso de manera que para cada $t > 1$ existe $m^t(1) < m^t(2) < ...$ subsucesión de $m^{t-1}(1) < m^{t-1}(2) < ...$ con

$$\tau(d_s) = \lim_{i<j, i\to\infty} \|d_s + x_{m^t(j)}^{m^t(i)}\| \text{ para } s = 1,...,t.$$

Finalmente tomamos $m(1) = m^1(1) < m(2) = m^2(2) < m(3) = m^3(3) < ...$ que verifica

$$\tau(x) = \lim_{i<j, i\to\infty} \|x + x_{m(j)}^{m(i)}\| \text{ para cada } x \in D.$$

Como D es denso en E, la continuidad nos permite concluir que la igualdad es cierta para cada $x \in E$, con lo que concluye la prueba de la afirmación.

Por la elección de las sucesiones x_k^n tenemos que $\lim_i \lim_j x_{m(j)}^{m(i)} = 0$ débilmente. Usando ahora el lema 4.3.17 tenemos que existe una sucesión $(i_l, j_l)_{l\in\mathbb{N}}$ con $i_l < j_l$ para cada $l \in \mathbb{N}$ y $\lim_l i_l = \infty$ de manera que $\lim_l x_{m(i_l)}^{m(j_l)} = 0$. Notemos que sigue siendo

$$\tau(x) = \lim_l \|x + x_{m(j_l)}^{m(i_l)}\| \text{ para cada } x \in E.$$

Así pues
$$(\sigma * \tau)(0) = (\tau * \sigma)(0) = \lim_{l,\mathscr{U}} \sigma(x^{m(i_l)}_{m(j_l)})$$
para cualquier ultrafiltro libre $\mathscr{U}$, de manera que
$$(\sigma * \tau)(0) = (\tau * \sigma)(0) = \lim_{l} \sigma(x^{m(i_l)}_{m(j_l)}).$$
De (4.6) deducimos que
$$\left|(\sigma * \tau_{m(i_l)})(0) - \sigma(x^{m(i_l)}_{m(j_l)})\right| \leq \frac{1}{m(i_l)},$$
luego $\lim_l (\sigma * \tau_{m(i_l)})(0) = (\sigma * \tau)(0)$. □

Observación 4.3.19. *Si E es débilmente estable, entonces para cualesquiera tipos débiles σ, τ y $a \in E$ se tiene que $(\sigma * \tau) * \sigma_a = \sigma * (\tau * \sigma_a)$.*

Demostración. Si $\sigma = \lim_{n,\mathscr{U}} a_n$, $\tau = \lim_{m,\mathscr{V}} b_m$ entonces, usando que $\tau * \sigma_a = \lim_{m,\mathscr{V}} (b_m + a)$ (notar que $b_m + a$ es débilmente convergente) se deduce
$$\sigma * (\tau * \sigma_a)(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x + a_n + b_m + a\| = (\sigma * \tau)(x + a) = (\sigma * \tau) * \sigma_a(x)$$
para cada $x \in E$. □

Usando la observación anterior y la conmutatividad del producto de convolución podemos probar el corolario final. Señalar que la prueba que incluimos es distinta a la original del artículo [7].

Corolario 4.3.20. *Si E es débilmente estable y no contiene copias isométricas de ℓ^1 entonces la operación convolución $* : T_{\omega n}(E) \times T_{\omega n}(E) \to T_{\omega n}(E)$ es separadamente continua.*

Demostración. Fijado $\sigma \in T_{\omega n}(E)$ tenemos que comprobar que la aplicación $\tau \mapsto \sigma * \tau$ es continua (la continuidad en la otra componente se deduce por conmutatividad). Por la metrizabilidad de $T_{\omega n}(E)$ podemos usar la caracterización de la continuidad en términos de sucesiones.

Supongamos que τ_n es una sucesión de tipos débilmente nulos que converge puntualmente hacia τ, de manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede escribir $\tau_n = \lim_k x^n_k$ para una sucesión $(x^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ débilmente convergente hacia cero. Fijado $x \in E$ observemos que podemos escribir $(\sigma * \tau_n)(x) = (\tau_n * \sigma)(x) = \lim_k \sigma(x + x^n_k) = \lim_k (\sigma * \sigma_x)(x^n_k) = ((\sigma * \sigma_x) * \tau_n)(0)$.

Como $(\sigma * \sigma_x)$ es un tipo débil (producto de convolución de tipos débiles es un tipo débil), podemos aplicar el lema 4.3.18 para afirmar que $(\sigma * \tau_n)(x) = ((\sigma * \sigma_x) * \tau_n)(0)$ converge hacia $((\sigma * \sigma_x) * \tau)(0)$. Ahora bien, $((\sigma * \sigma_x) * \tau)(0) = ((\sigma * \tau) * \sigma_x)(0)$ (propiedades conmutativa y la observación 4.3.19); y $((\sigma * \tau) * \sigma_x)(0) = (\sigma * \tau)(x)$, ya que si $(\sigma * \tau)$ es un tipo débil inducido por la sucesión débilmente convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $(\sigma * \tau) * \sigma_x$ viene inducida por $(a_n + x)_{n\in\mathbb{N}}$ que es débilmente convergente.

□

Las siguientes *propiedades del producto de convolución* son válidas en espacios estables o débilmente estables. Vamos a hacer la prueba en este último caso, el otro es análogo. Todos los tipos que manejemos supondremos que son débiles y cuando escribamos $\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} a_n$ estaremos suponiendo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en un subconjunto débilmente compacto de E.

1. *Propiedad asociativa*: Sean σ_1, σ_2, τ tipos débiles con $\tau = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} b_n$ entonces, usando que es separadamente continua y la observación 4.3.19

$$(\sigma_1 * \sigma_2) * \tau = \lim_{n,\mathscr{U}} (\sigma_1 * \sigma_2) * \sigma_{b_n} = \lim_{n,\mathscr{U}} \sigma_1 * (\sigma_2 * \sigma_{b_n}) = \sigma_1 * \lim_{n,\mathscr{U}} (\sigma_2 * \sigma_{b_n}) = \sigma_1 * (\sigma_2 * \tau).$$

2. *Propiedad distributiva* respecto del producto por escalares: Si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} a_n$, $\tau = \text{lím}_{m,\mathscr{V}} b_m \in T(E)$ entonces

$$\begin{aligned}(\lambda\sigma * \lambda\tau)(x) &= \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{U}} \|x + \lambda a_n + \lambda b_m\| = |\lambda| \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \left\| \frac{x}{\lambda} + a_n + b_m \right\| \\ &= |\lambda|(\sigma * \tau)\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \lambda(\sigma * \tau)(x).\end{aligned}$$

3. El *elemento neutro* de la convolución es el tipo trivial σ_0 ($0 \in E$).

$$(\sigma * 0)(x) = (\sigma * \sigma_0)(x) = \sigma(x) = (\sigma_0 * \sigma)(x)$$

para cada $x \in E$.

4. Para un tipo $\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} a_n$ denotemos $-\sigma := (-1)\sigma$. Observar que $-\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}} (-a_n)$.

4.3.3. Tipos simétricos

Definición 4.3.21. *Un tipo σ sobre E se dice que es* simétrico *si $\sigma(x) = \sigma(-x)$ para cada $x \in E$. En otras palabras, $\sigma = -\sigma$.*

1. El único tipo simétrico σ_a realizado por algún $a \in E$ es el tipo trivial, ya que $\|a + a\| = \sigma_a(a) = \sigma_a(-a) = \|a - a\| = 0$ implica $a = 0$.
2. Denotaremos por $T(E)^s, T_\omega(E)^s, T_{n\omega}(E)^s$ a los subconjutos formados por todos los elementos simétricos de $T(E), T_\omega(E), T_{n\omega}(E)$ respectivamente.
3. Si σ es simétrico entonces $\lambda\sigma$ también es simétrico para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$ es obvio, y si $\lambda \neq 0$ entonces $(\lambda\sigma)(-x) = |\lambda|\sigma(-x/\lambda) = |\lambda|\sigma(x/\lambda) = \sigma(x)$.
4. Si σ y τ son tipos simétricos y el producto de convolución $\sigma * \tau$ está bien definido entonces también es simétrico. En efecto, $-(\sigma * \tau) = (-\sigma) * (-\tau) = \sigma * \tau$.

4.3.4. Spreading model

El concepto de *spreading model* fue introducido por A. Brunel y L. Sucheston en [14], quienes usaban una versión del teorema de Ramsey [40] en su construcción. Vamos a introducir esta noción inspirándonos en [41], que a su vez se basa en una construcción de Krivine.

Sea E un espacio de Banach separable, un ultrafiltro no trivial $\mathscr{U}$ sobre $\mathbb{N}$ y una sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E que carece de límite a través de $\mathscr{U}$.

Sabemos entonces que la ultrapotencia $E_1 = E^{\mathscr{U}}$ es un espacio de Banach que contiene a E por una isometría canónica que asocia a cada $x \in E$ la clase de equivalencia de la sucesión constantemente igual a x (ver corolario 3.2.3). Identificaremos cada elemento $x \in E$ con su imagen en E_1. Si vemos $\xi_1 = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como un elemento de E_1 (recordar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ es una sucesión acotada por hipótesis) entonces $\xi_1 \notin E$, pues si así fuera existiría un elemento $x \in E$ de manera que $\|x-\xi_1\|_{E_1} = 0$, es decir, $\lim_{n,\mathscr{U}} \|x-x_n\| = 0$, lo que contradice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite a través de $\mathscr{U}$. Por otro lado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también se puede ver como una sucesión en $E \subseteq E_1$ que carece de límite a través de $\mathscr{U}$ (pues E es subconjunto cerrado de E_1 al ser completo).

Observemos que para cada $x \in E$ y $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ se tiene por la proposición 3.2.2 que

$$\|x+\lambda_1\xi_1\|_{E_1} = \lim_{n,\mathscr{U}} \|x+\lambda_1 x_n\|.$$

Repitiendo ahora el mismo razonamiento con E_1 y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E_1$ contruimos $E_2 = E_1^{\mathscr{U}}$, un elemento $\xi_2 = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_2 \setminus E_1$ y de nuevo la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E \subseteq E_1 \subseteq E_2$ carece de límite a través de $\mathscr{U}$. Además, para cada $x \in E$ y números reales λ_1, λ_2 se tiene que

$$\|x+\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2\|_{E_2} = \lim_{m,\mathscr{U}} \|x+\lambda_1\xi_1+\lambda_2 x_m\|_{E_1} = \lim_{m,\mathscr{U}}\lim_{n,\mathscr{U}} \|x+\lambda_1 x_n+\lambda_2 x_m\|.$$

Este proceso se extiende por inducción, lo que permite obtener una cadena creciente de espacios normados E_m. La unión $\bigcup_m E_m$ es entonces un espacio normado cuya completación, que denotamos por E_∞, es un espacio de Banach que contiene a $(\xi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ como sucesión. Podemos hacer un abuso de notación y escribir $\|\cdot\|$ para referirnos a la norma de E_∞, que coincide (cuando la restringimos) con las normas que teníamos en E y en todos los E_n. De este modo, para cada $x \in E$ y cualesquiera $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\left\|x+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\xi_j\right\| = \lim_{n_k,\mathscr{U}}\lim_{n_{k-1},\mathscr{U}}\ldots\lim_{n_1,\mathscr{U}}\left\|x+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_{n_j}\right\|. \tag{4.7}$$

De esta expresión es fácil deducir que

$$\left\|x+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\xi_j\right\| = \left\|x+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\xi_{n_j}\right\|$$

para cualquier sucesión estrictamente creciente $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

Una consecuencia de lo anterior es que la suma $X + \operatorname{span}\{\xi_m : m \in \mathbb{N}\}$ es directa, ya que si $x \in E$ se puede escribir de la forma $x = \sum_{j=1}^{m} a_j\xi_j$ para ciertos $a_j \in \mathbb{R}$ entonces tendríamos que $\|x-\sum_{j=1}^{m} a_j\xi_j\| = 0$. Podemos suponer que m es par ($m = 2k$) añadiendo sumandos nulos, y usando la desigualdad triangular obtenemos

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} a_j\xi_j - \sum_{j=k+1}^{2k} a_j\xi_j\right\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{k} a_j\xi_j - x\right\| + \left\|x - \sum_{j=k+1}^{2k} a_j\xi_j\right\| = 2\left\|\sum_{j=1}^{k} a_j\xi_j - x\right\| = 0.$$

Como los ξ_n son linealmente independientes por construcción deducimos que $a_j = 0$ para cada j, y por tanto, también $x = 0$.

La siguiente definición corresponde a [41, definición II.2.1, p. 79].

Definición 4.3.22. *El subespacio* $\overline{\text{span}}\{\xi_m : m \in \mathbb{N}\}$ *(clausura en E_∞) se denomina* spreading model *asociado a* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\mathscr{U}$*. La sucesión* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se dice que es la* sucesión fundamental *del* spreading model.

Bajo condiciones adicionales de estabilidad del E, el *spreading model* se puede relacionar con los tipos y su producto de convolución. Supongamos que *E es un espacio débilmente estable*, lo que nos permite definir la operación convolución para tipos débiles. Sea σ es un tipo débil sobre E que se puede describir como $\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}}\, x_n$ para una sucesión y un ultrafiltro como los considerados al comienzo de esta sección. Usando la definición y conmutatividad del producto de convolución se tiene que

$$\left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i \right\| = (\lambda_1\sigma * \ldots * \lambda_k\sigma)(x) = \lim_{n_1,\mathscr{U}} \lim_{n_2,\mathscr{U}} \ldots \lim_{n_k,\mathscr{U}} \|x + \lambda_1 x_{n_1} + \ldots + \lambda_k x_{n_k}\|.$$

Con la intención de simplificar la notación, vamos a introducir el *spreading model* de otra forma pero inspirándonos en lo visto hasta ahora. Denotamos por c_{00} al espacio de sucesiones de números reales con soporte finito y por $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ a la base canónica.

Proposición 4.3.23. *Supongamos que E es débilmente estable y $\sigma = \text{lím}_{n,\mathscr{U}}\, x_n$ es un tipo débil sobre E inducido por un ultrafiltro no trivial $\mathscr{U}$ sobre $\mathbb{N}$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ contenida en un débil compacto que carece de límite a través de $\mathscr{U}$. Sobre el espacio $E \oplus c_{00}$ la aplicación*

$$\left\| x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \right\|_\sigma := (\lambda_1\sigma * \ldots * \lambda_k\sigma)(x) = \lim_{n_1,\mathscr{U}} \lim_{n_2,\mathscr{U}} \ldots \lim_{n_k,\mathscr{U}} \|x + \lambda_1 a_{n_1} + \ldots + \lambda_k a_{n_k}\|.$$

define una norma.

Demostración. Podemos definir un operador lineal T de $E \oplus c_{00}$ en $E \oplus \text{span}\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ que es la identidad sobre E y verifica $T(e_n) = \xi_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dicho operador es claramente suprayectivo, pero también es inyectivo pues los elementos del núcleo son cero razonando igual que antes hemos hecho para ver que la suma $E \oplus \text{span}\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ era directa. De este modo, T es un isomorfismo lineal que verifica $\|y\|_\sigma = \|T(y)\|$ para cada $y \in E \oplus c_{00}$ por definición, lo que prueba que se trata de una norma.

□

Nota 4.4. *Se puede dar una demostración sin recurrir a ultraproductos, sino simplemente usando las propiedades de los tipos (ver detalles en [66]) para probar que la función $\|\cdot\|_\sigma$ definida como en la proposición anterior es efectivamente una norma sobre $E \oplus c_{00}$.*

Como consecuencia de la proposición 4.3.23 podemos redefinir:

Definición 4.4.1. *La completación de* $(c_{00}, \|\cdot\|_\sigma)$*se denomina* spreading model *asociado a* σ. *La sucesión* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se dice que es la* sucesión fundamental *del spreading model.*

Como razonábamos antes, la cantidad $\left\|x+\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i\right\|_\sigma$ es invariante por propagación, en el sentido de que para cualquier sucesión estrictamente creciente $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ se tiene que

$$\left\|x+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i\right\|_\sigma = \left\|x+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_{n_i}\right\|_\sigma .$$

Usando la conmutatividad del producto de convolución se observa que $\left\|x+\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i\right\|_\sigma$ es invariante para cualquier permutación de las constantes $(\lambda_i)_{i=1}^n$.

Resulta de espacial interés el caso en que el tipo σ con el que construimos el *spreading model* es un tipo simétrico.

Proposición 4.4.2. *Sea* σ *un tipo débil simétrico no nulo sobre un espacio de Banach débilmente estable* E. *La sucesión fundamental* $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ *constituye una sucesión básica, simétrica e incondicional de constante* 1 *para el* spreading model *asociado a* σ.

Demostración. Veamos que se trata de una sucesión básica 1-incondicional usando la proposición 4.1.3. Sean $n\le m$ y sea $A=\{i_1,\ldots,i_n\}$ un subconjunto de $\{1,\ldots,m\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in A} a_i e_i\right\|_\sigma &= \left\|\frac{1}{2}\left(\sum_{i\in A} a_i e_i+\sum_{i\notin A} a_i e_i\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i\in A} a_i e_i-\sum_{i\notin A} a_i e_i\right)\right\|_\sigma\\ &\le \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right\|_\sigma+\frac{1}{2}\left\|\sum_{i\in A} a_i e_i-\sum_{i\notin A} a_i e_i\right\|_\sigma=\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right\|_\sigma\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que el tipo σ es simétrico. Para ver que la sucesión es simétrica basta observar (ver [32, fact 6.17 (iii), p. 171]) que si π es una permutación de $\mathbb{N}$ entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_\sigma = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_{\pi(i)}\right\|_\sigma ,$$

lo cual es cierto por la invarianza de la norma $\|\cdot\|_\sigma$, que a su vez era consecuencia de la conmutatividad del producto de convolución. □

La siguiente proposición será también fundamental.

Proposición 4.4.3. *Si* E *es un espacio de Banach débilmente estable que no contiene copias de* ℓ^1 *entonces el conjunto* $T_{\omega n}(E)^s$ *no se reduce al tipo nulo.*

Demostración. Un resultado de Rosenthal [67, Consecuencia I, p. 2411] garantiza que si E no contiene copias isomorfas a ℓ^1 entonces dicho espacio carece de la propiedad de Schur, con lo que podemos encontrar una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ débil-convergente hacia 0 pero que no converge en norma a 0. Pasando a una subsucesión podemos suponer que existe un número real positivo C

tal que $\|a_n\| \geq C > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Señalar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tampoco puede tener subsucesiones convergentes (en norma), ya que dicha subsucesión convergería débilmente al mismo límite siendo este necesariamente 0, lo que contradice la existencia de C.

Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro no trivial sobre $\mathbb{N}$ y $\sigma = \lim_{n,\mathscr{U}} a_n$. Entonces $\tau = \sigma * (-\sigma) \in T_{\omega n}(E)$ es un tipo débilmente nulo, y simétrico ya que

$$\tau(-x) = (-\tau)(x) = (-(\sigma * (-\sigma)))(x) = ((-\sigma) * \sigma)(x) = (\sigma * (-\sigma))(x) = \tau(x).$$

Además es no trivial, pues si lo fuera entonces $\|x + e_1 - e_2\|_\sigma = (\sigma * (-\sigma))(x) = \|x\|$ para cada $x \in E$. En particular $\|e_1 - e_2\|_\sigma = 0$, lo que significa que

$$0 = \|e_1 - e_2\|_\sigma = (\sigma * (-\sigma))(0) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|a_n - a_m\| = \lim_{n,\mathscr{U}} \sigma(-a_n) = \lim_{n,\mathscr{U}} \|-a_n + e_1\|_\sigma.$$

De este modo $\|-a_n + e_1\|_\sigma$ admite una subsucesión convergente hacia cero, es decir, existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en seminorma $\|\cdot\|_\sigma$ hacia e_1. En particular, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para la seminorma $\|\cdot\|_\sigma$, luego también lo es en la norma de E ya que $\|x\| = \|x\|_\sigma$ para cada $x \in E$. □

4.5. ℓ^p-tipos y c_0-tipos

A lo largo de esta sección asumiremos que *E es un espacio débilmente estable que no posee copias (isomorfas) de ℓ^1*. La segunda condición no supone ninguna restricción para el problema que queremos abordar, pues si E tiene copia isomorfa de ℓ^1 entonces por el lema 4.1.7 tenemos que E tiene copias casi isométricas de ℓ^1 y no habría nada más que probar. Subrayamos a contnuación las principales consecuencias de estas hipótesis que resultarán fundamentales para los resultados de la sección:

1. El conjunto de tipos débilmente nulos $T_{\omega n}(E)$ es un subconjunto cerrado de $T(E)$ (ver [68, lemma 3.2, p. 84]). Como consecuencia *el subconjunto $T^s_{\omega n}(E)$ de los tipos simétricos* también es cerrado, pues el límite puntual de tipos simétricos es claramente simétrico.
2. El conjunto $T^s_{\omega n}(E)$ *contiene al menos un tipo no nulo* por la proposición 4.4.3.

Definición 4.5.1. *Un tipo débil simétrico no nulo σ sobre un espacio de Banach débilmente estable se denomina ℓ^p-*tipo *, $p \geq 1$, (resp. c_0-*tipo *) si verifica:*

$$\lambda\sigma * \mu\sigma = (\lambda^p + \mu^p)^{1/p}\sigma \qquad (\textit{resp. } \lambda\sigma * \mu\sigma = \sup\{\lambda, \mu\}\sigma)$$

para cualesquiera $\lambda, \mu \in [0, \infty)$.

La razón de tal denominación se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.5.2. *Sea E un espacio de Banach débilmente estable de dimensión infinita que posee un ℓ^p-tipo para algún $p \in [1, +\infty)$ (resp. c_0-tipo). Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E que es $(1+\varepsilon)$-equivalente a la base canónica de ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ (resp. c_0).*

Demostración. Primero veamos que se puede suponer que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está normalizada. Como $\sigma(x) = \text{lím}_n \|x_n + x\|$ no es el tipo nulo (por definición) entonces $\sigma(0) = \text{lím}_n \|x_n\| \neq 0$, de modo que quitando una cantidad finita de ceros podemos suponer que existe $\delta > 0$ tal que $\|x_n\| \geq \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Llamando $\alpha = \sigma(0)^{-1} > 0$ tenemos que $\tau = \alpha\sigma \in T_\omega^s(E)$ es un ℓ^p-tipo (resp. c_0-tipo), ya que

$$\lambda\tau * \mu\tau = (\lambda\alpha)\sigma * (\mu\alpha)\sigma = ((\lambda\alpha)^p + (\mu\alpha)^p)^{1/p}\sigma = (\lambda^p + \mu^p)^{1/p}\alpha\sigma = (\lambda^p + \mu^p)^{1/p}\tau.$$

(Para el caso del c_0-tipo es análogo). Por tanto

$$\begin{aligned}(\alpha\sigma)(x) = \alpha\sigma\left(\frac{x}{\alpha}\right) &= \frac{1}{\text{lím}_n \|x_n\|} \lim_n \|x_n + x \lim_n \|x_n\|\| = \lim_n \frac{1}{\|x_n\|}\|x_n + \|x_n\|x\| \\ &= \lim_n \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} + x \right\|\end{aligned}$$

donde la sucesión $(x_n/\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ está normalizada. Vamos a ver que también está contenida en un ω-compacto: si K es un conjunto ω-compacto que contiene a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $(1/\delta)K$ también es ω-compacto ya que las homotecias son ω-continuas. Como consecuencia del teorema de Krein (ver [32, teorema 3.58, p. 85]) podemos afirmar que $\overline{\text{co}}((1/\delta)K \cup \{0\})$ es ω-compacto. Pero dicho conjunto contiene a los elementos $x_n/\|x_n\| = \frac{\delta}{\|x_n\|}(x_n/\delta)$ donde $\delta/\|x_n\| \leq 1$.

Suponemos entonces que σ es un ℓ^p-tipo con sucesión aproximante (ω-convergente) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normalizada. Nuestro objetivo es probar lo siguiente: *Fijado $\varepsilon > 0$, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que es $(1+\varepsilon)$-equivalente a la base canónica de ℓ^p.*

Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotemos

$$D_k = \left\{ \frac{n\varepsilon}{(k+1)2^{k+2}} : n \in \mathbb{Z}, |n\varepsilon| \leq (k+1)2^{k+2} \right\} \subseteq [-1,1].$$

Notar que para todo número real en $[-1,1]$ existe un elemento de D_k tal que la distancia entre ambos es menor o igual que $\varepsilon/((k+1)2^{k+2})$.

Afirmación: *Existe una sucesión $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots < n_k < m_k < \ldots$ verificando*

$$\left| \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + (|b_k|^p + |b_{k+1}|^p)^{1/p} x_{n_k} \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{k-1} b_j x_{n_j} + b_k e_1 + b_{k+1} e_2 \right\|_\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{k} b_j x_{n_j} + b_{k+1} x_n \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{k-1} b_j x_{n_j} + b_k e_1 + b_{k+1} e_2 \right\|_\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

si $n \geq m_k$, cualesquiera que sean $b_1, \ldots, b_{k+1} \in D_k$.

Para probar la afirmación haremos una construcción inductiva. Sean $b_1, b_2 \in D_1$. De la igualdad

$$\begin{aligned}
\lim_n \left\| (|b_1|^p + |b_2|^p)^{1/p} x_n \right\| &= \left\| (|b_1|^p + |b_2|^p)^{1/p} e_1 \right\|_\sigma \\
&= (|b_1|^p + |b_2|^p)^{1/p} \sigma(0) \\
&= (|b_1|\sigma * |b_2|\sigma)(0) \\
&= (b_1\sigma * b_2\sigma)(0) \text{ (por ser } \sigma \text{ simétrico)} \\
&= \|b_1 e_1 + b_2 e_2\|_\sigma
\end{aligned}$$

se deduce la existencia de n_1 (que se puede suponer independiente de $b_1, b_2 \in D_1$ ya que este último conjunto es finito) de manera que

$$\left| \|(|b_1|^p + |b_2|^p)^{1/p} x_n\| - \|b_1 e_1 + b_2 e_2\|_\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2^3} \text{ si } n \geq n_1.$$

Por otro lado,

$$\|b_1 e_1 + b_2 e_2\|_\sigma = \lim_n \lim_m \|b_1 x_n + b_2 x_m\|,$$

luego existe $n_1 \in \mathbb{N}$ (se puede suponer que coincide con el obtenido antes) tal que

$$\left| \lim_m \|b_1 x_n + b_2 x_m\| - \|b_1 e_1 + b_2 e_2\|_\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2^3} \text{ si } n \geq n_1.$$

Así pues, podemos encontrar $m_1 > n_1$ (independiente de b_1, b_2) de modo que

$$|\|b_1 x_{n_1} + b_2 x_n\| - \|b_1 e_1 + b_2 e_2\|_\sigma| < \frac{\varepsilon}{2^3}$$

siempre que $n \geq m_1$.

Supongamos que $k > 1$ y hemos construido (hipótesis de inducción) $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots < n_{k-1} < m_{k-1}$ verificando

$$\left| \left\| \sum_{j<k-1} b_j x_{n_j} + (|b_{k-1}|^p + |b_k|^p)^{1/p} x_{n_{k-1}} \right\| - \left\| \sum_{j<k-1} b_j x_{n_j} + (|b_{k-1}|^p + |b_k|^p)^{1/p} e_1 \right\|_\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{k-1} b_j x_{n_j} + b_k x_n \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{k-2} b_j x_{n_j} + b_{k-1} e_1 + b_k e_2 \right\|_\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

si $n \geq m_{k-1}$, cualesquiera que sean $b_1, \ldots, b_k \in D_{k-1}$.

Fijamos ahora $b_1,\ldots,b_{k+1} \in D_k$. De la igualdad

$$\begin{aligned}
\lim_n \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + (|b_k|^p + |b_{k+1}|^p)^{1/p} x_n \right\| &= \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + (|b_k|^p + |b_{k+1}|^p)^{1/p} e_1 \right\|_\sigma \\
&= (|b_k|^p + |b_{k+1}|^p)^{1/p} \sigma \left(\sum_{j<k} b_j x_{n_j} \right) \\
&= (|b_k|\sigma * |b_{k+1}|\sigma) \left(\sum_{j<k} b_j x_{n_j} \right) \\
&= b_k \sigma * b_{k+1} \sigma \left(\sum_{j<k} b_j x_{n_j} \right) \ (\sigma \text{ simétrico}) \\
&= \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + b_k e_1 + b_{k+1} e_2 \right\|_\sigma
\end{aligned}$$

se deduce la existencia de $n_k > m_{k-1}$ (que puede considerarse independiente de $b_1,\ldots,b_{k+1}$ por la finitud de D_k) verificando

$$\left| \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + (|b_k|^p + |b_{k+1}|^p)^{1/p} x_{n_k} \right\| - \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + b_k e_1 + b_{k+1} e_2 \right\|_\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \tag{4.8}$$

Por otro lado,

$$\left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + b_k e_1 + b_{k+1} e_2 \right\|_\sigma = \lim_n \lim_m \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + b_k x_n + b_{k+1} x_m \right\|,$$

luego existe $n_k \in \mathbb{N}$ (se puede suponer que coincide con el obtenido antes) tal que

$$\left| \lim_m \left\| \sum_{j=1}^{k} b_j x_{n_j} + b_{k+1} x_m \right\| - \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + b_k e_1 + b_{k+1} e_2 \right\|_\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Así pues podemos encontrar $m_k > n_k$ (independiente de $b_1,\ldots,b_{k+1}$) de modo que

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{k} b_j x_{n_j} + b_{k+1} x_n \right\| - \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + b_k e_1 + b_{k+1} e_2 \right\|_\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \tag{4.9}$$

siempre que $n \geq m_k$. Con ésto concluye la prueba de la afirmación.

Para la sucesión (n_k, m_k) anterior tenemos que la subsucesión $(x_{n_k})_k$ verifica

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{k+1} b_j x_{n_j} \right\| - \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + (|b_k|^p + |b_{k+1}|^p)^{1/p} x_{n_k} \right\| \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \tag{4.10}$$

Usando un argumento de densidad podemos extender la propiedad anterior: supongamos que $(a_j)_{j=1}^{k+1}$ son números reales en $[-1,1]$ verificando $\sum_{j=1}^{k+1}|a_j|^p = 1$. Entonces existen $b_1,...,b_{k+1} \in D_k$ con

$$|a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{(k+1)2^{k+2}} \text{ para cada } j = 1,...,k+1.$$

Por tanto

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{k+1} a_j x_{n_j} \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{k+1} b_j x_{n_j} \right\| \right| \le \sum_{j=1}^{k+1} |a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \tag{4.11}$$

usando la desigualdad triangular y que la sucesión x_k está normalizada. Del mismo modo, (ahora usamos también la desigualdad triangular para la norma $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} \left| \left\| \sum_{j<k} a_j x_{n_j} + (|a_k|^p + |a_{k+1}|^p)^{1/p} x_{n_k} \right\| - \left\| \sum_{j<k} b_j x_{n_j} + (|b_k|^p + |b_{k+1}|^p)^{1/p} x_{n_k} \right\| \right| \le \\ \le \sum_{j<k} |a_j - b_j| + (|a_k - b_k|^p + |a_{k+1} - b_{k+1}|^p)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

De nuevo por la desigualdad triangular combinada con (4.10) (4.11), (4.12) obtenemos

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{k+1} a_j x_{n_j} \right\| - \left\| \sum_{j<k} a_j x_{n_j} + (|a_k|^p + |a_{k+1}|^p)^{1/p} x_{n_k} \right\| \right| < \frac{\varepsilon}{2^k} \tag{4.13}$$

Notemos que esta ecuación nos permite ir quitando en una suma $\sum_{j=1}^{k+1} a_j x_{n_j}$ el último sumando pasando el coeficiente a_{k+1} al x_k en la forma indicada. Usando esta idea de manera recursiva podemos ir eliminado los sumandos hasta quedarnos sólo con x_{n_1}:

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{k+1} a_j x_{n_j} \right\| - \left\| \sum_{j<k} a_j x_{n_j} + \left(\sum_{i=k}^{k+1} |a_i|^p \right)^{1/p} x_{n_k} \right\| \right| < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{k-1} a_j x_{n_j} + (|a_k|^p + |a_{k+1}|^p)^{1/p} x_{n_k} \right\| - \left\| \sum_{j<k} a_j x_{n_j} + \left(\sum_{i=k-1}^{k+1} |a_i|^p \right)^{1/p} x_{n_{k-1}} \right\| \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$$

$$\dots$$

$$\left| \left\| a_1 x_{n_1} + \left(\sum_{i=2}^{k+1} |a_i|^p \right)^{1/p} x_{n_2} \right\| - \left\| \left(\sum_{i=1}^{k+1} |a_i|^p \right)^{1/p} x_{n_1} \right\| \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La serie de desigualdades anteriores combinadas mediante la desigualdad triangular nos permite escribir

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{k+1} a_j x_{n_j} \right\| - \left(\sum_{i=1}^{k+1} |a_i|^p \right)^{1/p} \|x_{n_1}\| \right| < \varepsilon.$$

Usando que la sucesión x_{n_k} está normalizada y la hipótesis $\sum_{j=1}^{k+1}|a_j|^p = 1$ tenemos que

$$1-\varepsilon \leq \left\|\sum_{j=1}^{k+1} a_j x_{n_j}\right\| < 1+\varepsilon.$$

Luego para cada $\varepsilon > 0$, si $(a_j)_{j=1}^{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) es una familia arbitraria de escalares entonces

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^{k+1}|a_j|^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{j=1}^{k+1} a_j x_{n_j}\right\| < (1+\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^{k+1}|a_j|^p\right)^{1/p}.$$

Para c_0 la prueba es totalmente análoga usando la norma $\|\cdot\|_\infty$ donde antes aparecía la norma $\|\cdot\|_p$.

□

El siguiente resultado se debe a Bohnenblust [11].

Proposición 4.5.3. *Sea $\phi : [0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\phi(tx,ty) = t\phi(x,y)$ para cada $t,x,y \geq 0$.*
2. *$\phi(x,y) \leq \phi(x',y')$ si $x' \geq x \geq 0$, $y' \geq y \geq 0$.*
3. *$\phi(x,y) = \phi(y,x)$ si $x,y \geq 0$.*
4. *$\phi(x,\phi(y,z)) = \phi(\phi(x,y),z)$ para todo $x,y,z \geq 0$.*
5. *$\phi(0,1) = 1$.*

Entonces ϕ es de la forma $\phi(x,y) = (x^p+y^p)^{1/p}$ para algún $p \in (0,\infty)$ o bien $\phi(x,y) = \max\{x,y\}$.

Demostración. Definimos la sucesión $\alpha_1 := 1$ y $\alpha_{n+1} = \phi(1,\alpha_n)$ para $n \geq 1$. Notar que $\alpha_{n+1} = \phi(1,\alpha_n) \geq \phi(0,\alpha_n) = \alpha_n$ nos dice que la sucesión es no decreciente.

Vamos a probar por inducción que se verifica $\alpha_{n+m} = \phi(\alpha_n,\alpha_m)$ y $\alpha_{n\cdot m} = \alpha_n\alpha_m$ para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$. Es claro que ambas igualdades son ciertas si $m = 1$ y $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario. Supongamos que $m > 1$ y es cierto que $\alpha_{n+m-1} = \phi(\alpha_n,\alpha_{m-1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Combinando las propiedades del enunciado con la igualdad anterior llegamos a que $\alpha_{n+m} = \phi(1,\alpha_{n+m-1}) = \phi(1,\phi(\alpha_{m-1},\alpha_n)) = \phi(\phi(1,\alpha_{m-1}),\alpha_n) = \phi(\alpha_m,\alpha_n)$. Por último, a partir de esta igualdad se deduce también que $\alpha_{n\cdot m} = \phi(\alpha_n,\alpha_{n\cdot m-n}) = \phi(\alpha_n,\alpha_n\alpha_{m-1}) = \alpha_n\phi(1,\alpha_{m-1}) = \alpha_n\alpha_m$.

Vamos a distinguir ahora dos casos:

Si $\alpha_2 = \phi(1,1) = 1$ entonces si $s \geq t$ tenemos que $\phi(s,t) \geq \phi(s,0) = s$ y $\phi(s,t) \leq \phi(s,s) = s\phi(1,1) = s$ de donde se deduce que $\phi(t,s) = \max\{t,s\}$.

Si $\alpha_2 > 1$ y fijamos $n \geq m \geq 2$ arbitrarios, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un $k = k(i) \in \mathbb{N}$ tal que $k\log m \leq i\log n \leq (k+1)\log m$. Como la sucesión $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ es creciente, usando las desigualdades anteriores uno deduce que $\alpha_{m^k} \leq \alpha_{n^i} \leq \alpha_{m^{k+1}}$. De este modo, $(\alpha_m)^k \leq (\alpha_n)^i \leq (\alpha_m)^{k+1}$ por una de las propiedades vistas antes. Podemos reescrir las desigualdades anteriores como $k\log\alpha_m \leq i\log\alpha_n \leq (k+1)\log\alpha_m$. Dividiendo deducimos que

$$\frac{k}{k+1}\frac{\log\alpha_m}{m} \leq \frac{\log\alpha_n}{\log n} \leq \frac{k+1}{k}\frac{\log\alpha_m}{\log m}.$$

Tomando límite cuando k tiende a infinito llegamos a que $\log \alpha_m / \log m = \log \alpha_n / n$ para cualqesquiera $m, n \in \geq 2$. Llamando p a la constante $\log m / \log \alpha_m > 0$ deducimos que $\alpha_m = m^{1/p}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $\alpha_{n+m} = \phi(\alpha_n, \alpha_m)$ entonces $\phi(m,n) = \phi(\alpha_{n^p}, \alpha_{m^p}) = (n^p + m^p)^{1/p}$. Usando la propiedad (i) es fácil extender la igualdad anterior a pares de racionales no negativos. Para extenderlo a pares de números reales no negativos, basta usar la propiedad (ii) aproximando con racionales por debajo y por arriba, así como el hecho de que $(x^p + y^p)^{1/p}$ es una función continua en $[0,\infty) \times [0,\infty)$. □

Necesitaremos también un resultado auxiliar que se deduce de la prueba de [43, teorema 9.7, p. 60].

Proposición 4.5.4. *Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base incondicional de modo que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n x_n \right\| \leq C_1 \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|$$

para cualesquiera $c_1, \ldots, c_N$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N = \pm 1$. Entonces para todo $0 \leq b_i \leq c_i$ ($i \in \{1, \ldots, N\}$) tenemos que

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|.$$

Lema 4.5.5. *Sea E un espacio de Banach débilmente estable y σ un tipo débil simétrico no nulo de E. La condición necesaria y suficiente para que σ sea ℓ^p-tipo para algún $p \in [1,\infty)$ o un c_0-tipo, es que para cada $\alpha \geq 0$ exista $\beta \geq 0$ tal que*

$$\sigma * \alpha\sigma = \beta\sigma.$$

Demostración. El hecho de que la condición es necesria es clara a partir de la definición. Veamos que la condición es suficiente. Podemos suponer que $\sigma(0) = 1$ ya que en otro caso tomamos $\tau = \sigma(0)^{-1}\sigma$ (el tipo σ es no nulo) en lugar de σ, ya que también verifica

$$(\tau * \alpha\tau) = \big(\sigma(0)^{-1}\sigma * (\sigma(0)^{-1}\alpha)\sigma\big) = \sigma(0)^{-1}(\sigma * \alpha\sigma) = \sigma(0)^{-1}(\beta\sigma) = \beta(\sigma(0)^{-1}\sigma) = \beta\tau.$$

Es claro que si τ un ℓ^p-tipo o un c_0-tipo entonces σ también lo es.

Consideramos los vectores elementales $e_1, e_2 \in c_{00}$. Por hipótesis, para los α, β del enunciado tenemos

$$\|x + e_1 + \alpha e_2\|_\sigma = \|x + \beta e_1\|_\sigma \quad \forall x \in E.$$

Notemos que si $\mu, \lambda \geq 0$ entonces existe $\phi(\lambda,\mu) \geq 0$ tal que $\lambda\sigma * \mu\sigma = \phi(\lambda,\mu)\sigma$ por la hipótesis del enunciado. De hecho podemos dar explícitamente cómo se define la función ϕ ya que $\phi(\lambda,\mu) = \phi(\lambda,\mu)\sigma(0) = (\lambda\sigma * \mu\sigma)(0)$. Veamos que satisface las hipótesis de la proposición 4.5.3.

1. $(t\lambda\sigma) * (t\mu\sigma) = t(\lambda\sigma * \mu\sigma)$ es claro.

2. Si $\lambda' \geq \lambda \geq 0$, $\mu' \geq \mu \geq 0$; como $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es sucesión básica 1-incondicional del *spreading model*,
$$\|\lambda e_1 + \mu e_2\|_\sigma \leq \|\lambda' e_1 + \mu' e_2\|_\sigma$$
por la proposición 4.5.4.
3. $\lambda\sigma * \mu\sigma = \mu\sigma * \lambda\sigma$ es la conmutatividad del producto de convolución.
4. Esta propiedad es consecuencia de la asociatividad del producto de convolución. Sean $\lambda, \mu, \chi \geq 0$, entonces
$$\|\lambda e_1 + \mu e_2 + \chi e_3\|_\sigma = (\lambda\sigma * \mu\sigma * \chi\sigma)(0) = (\lambda\sigma * \phi(\mu,\chi)\sigma)(0) = \phi(\lambda, \phi(\mu,\chi))(0).$$
De igual modo se comprueba que $\|\lambda e_1 + \mu e_2 + \chi e_3\|_\sigma = \phi(\phi(\lambda,\mu),\chi)$.
5. $\phi(0,1)\sigma = (0\sigma * 1\sigma) = \sigma$.

Por tanto, deducimos que existe $p \in (0,\infty)$ tal que $\phi(\lambda,\mu) = (\lambda^p + \mu^p)^{1/p}$, o bien, $\phi(\lambda,\mu) = \max\{\lambda,\mu\}$. Sin embargo, no puede ser $0 < p < 1$, ya que si así fuera $\sigma * \mu\sigma = (1+\mu^p)^{1/p}\sigma$ implica $\|e_1 + \mu e_2\|_\sigma = (\sigma * \mu\sigma)(0) = (1+\mu^p)^{1/p}$ y, por la desigualdad triangular,
$$(1+\mu^p)^{1/p} \leq \|e_1\|_\sigma + \|\mu e_2\|_\sigma = 1 + \mu \text{para cada } \mu \geq 0,$$
lo cual es falso si $p \in (0,1)$. $\square$

Definición 4.5.6. *Un subconjunto C de $T^s_{\omega n}(E)$ diremos que es un cono (de convolución) si tiene las siguientes propiedadees:*
1. *C es cerrado en $T^s_{\omega n}(E)$.*
2. *C no se reduce al tipo nulo.*
3. *Si $\sigma \in C$ entonces $\alpha\sigma \in C$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.*
4. *C es cerrado para el producto de convolución.*

Supongamos que $\sigma \in T^s_{\omega n}(E)$ es no nulo (ya hemos comentado al principio de esta sección que existe al menos un tipo en estas condiciones por nuestras hipótesis sobre el espacio E y la proposición 4.4.3). El conjunto $H = \{\alpha\sigma : \alpha \in \mathbb{R}\}$ verifica trivialmente las condiciones 2. y 3. de la definición anterior. Vamos a comprobar que verifica 1. usando la caracterización de cerrados por sucesiones, que en este caso es válida pues el espacio de tipos es polaco, en particular metrizable. Si $\alpha_n\sigma$ es una sucesión de elementos de H que converge hacia un tipo τ, entonces $\alpha_n\sigma(0)$ converge a $\tau(0)$ (recordar que se trata de la topología producto), de donde α_n converge hacia $\sigma(0)^{-1}\tau(0)$. Si dicho límite es 0 entonces $\tau = 0$ es el tipo nulo que ya sabíamos pertenece a H. Si es distinto de cero, podemos suponer que $\alpha_n \neq 0$ para cada n (quitando un número finito de términos) de modo que
$$\tau(x) = \lim_n (\alpha_n\sigma)(x) = \lim_n |\alpha_n|\sigma\left(\frac{x}{\alpha_n}\right) = \sigma(0)^{-1}\tau(0)\sigma\left(\frac{x}{\sigma(0)^{-1}\tau(0)}\right) = (\tau(0)\sigma(0)^{-1}\sigma)(x)$$
para cada $x \in E$, donde hemos usado la continuidad de σ. De este modo $\tau \in H$, es decir, H es cerrado en $T(E)$, y por tanto en $T^s_{\omega n}(E)$. La siguiente proposición da una caracterización de los tipos σ como antes para los que H verifica la cuarta condición de la definición, y por tanto, es un cono.

Proposición 4.5.7. *Sea $\sigma \in T^s_{\omega n}(E)$ un tipo no nulo y $H = \{\alpha\sigma : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Entonces H es un cono si y solo si σ es un ℓ^p-tipo o un c_0-tipo.*

Demostración. Si H es un cono, dado $\alpha \geq 0$, $\sigma * \alpha\sigma \in H$ por la definición de cono, de modo que existirá $\beta \in \mathbb{R}$ con $\sigma * \alpha\sigma = \beta\sigma$. Si σ es no nulo, entonces $0 \leq (\sigma * \alpha\sigma)(0) = \beta\sigma(0)$ lo que implica $\beta \geq 0$ ya que $\sigma(0) > 0$. Usando el lema 4.5.5 deducimos que σ es un ℓ^p-tipo o un c_0-tipo.

Recíprocamente, supongamos que $\sigma \neq 0$ es un ℓ^p-tipo o un c_0-tipo. H verifica las condiciones 1.,2. y 3. de la definición 4.5.6 como comentábamos antes de esta proposición. Para comprobar la condición 4. notemos que $H \subseteq T^s_{\omega n}(E) \subseteq T_\omega(E)$, donde tenemos definido el producto de convolución. Si $\alpha_1\sigma$ y $\alpha_2\sigma$ son dos elementos de H, alguno de los cuales podemos suponer no nulo (por ejemplo α_1), podemos usar el lema 4.5.5 y deducir

$$(\alpha_1\sigma) * (\alpha_2\sigma) = \alpha_1 \left(\sigma * \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sigma\right) = \alpha_1(\beta\sigma) = (\alpha_1\beta)\sigma \in H.$$

$\square$

Sea C un cono y consideremos $C_1 = \{\sigma \in C : \sigma(0) = 1\}$. Dicho conjunto posee las siguientes propiedades:

(a) C_1 es compacto: Notemos que si $\sigma \in C_1$ y $\sigma = \lim_n a_n$ para una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ débilmente nula, entonces significa $1 = \sigma(0) = \lim_n \|a_n\|$, de manera que

$$\sigma(x) = \lim_n \|x + a_n\| \leq \|x\| + \lim_n \|a_n\| = \|x\| + 1.$$

Así pues,

$$C_1 \subseteq \prod_{x\in E} [0, 1 + \|x\|],$$

y puesto que C_1 es claramente cerrado deducimos, usando el teorema de Tychonoff, que se trata de un compacto.

(b) C_1 es no vacío, pues tomando $0 \neq \sigma \in C$ se tiene que $\sigma(0)^{-1}\sigma \in C_1$.

(c) C se puede escribir en términos de C_1 como $C = \{\alpha\sigma : \sigma \in C_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$. En efecto, si σ no es un tipo nulo $\sigma = \sigma(0)\sigma(0)^{-1}\sigma$ donde $\sigma(0)^{-1}\sigma \in C_1$.

Por tanto, todo cono C queda perfectamente determinado conociendo C_1.

Lema 4.5.8. *Todo cono C contiene un cono minimal (para la inclusión).*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los conos B contenidos en C. Se trata de una familia no vacía ($C \in \mathscr{A}$) donde tenemos definido el orden $B_1 \leq B_2$ si y sólo si $B_2 \subseteq B_1$. Se trata de una familia inductiva: dada una cadena H de conos de $\mathscr{A}$, la intersección $D = \bigcap_{B\in H} B$ es un cono. En efecto, basta probar que no se reduce al tipo trivial pues en ese caso el resto de propiedades de la definición se verifican de manera obvia. Ahora bien, la familia $\{B_1 : B \in H\}$ sigue siendo una cadena para la inclusión de manera que $D_1 = \bigcap_{B_1 \in H_1} B_1 \subseteq D$ es no vacío por compacidad. Por tanto, D es una cota inferior de la cadena H en $\mathscr{A}$. Usando el lema de Zorn se deduce el resultado buscado. $\square$

Recordar que si X es un espacio normado X sobre $\mathbb{K}$ entonces el espectro de un operador $T : X \to X$ se define como el conjunto de todos los elementos $\lambda \in \mathbb{K}$ para los que $T - \lambda I$ es un operador no invertible, y se denota por $\operatorname{spec}(T)$. En el caso en que $X = E$ es un espacio de Banach y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces cualquier operador $T \in L(X)$ verifica que su espectro $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$ (ver [21, teorema 2.2.6, p. 152]). Probamos ahora la siguiente proposición que resultará de utilidad más adelante.

Proposición 4.5.9. *Sea E un espacio de Banach real o complejo, T un operador lineal y continuo de E en sí mismo y $\lambda \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ un punto frontera del espectro de T. Entonces existe una sucesión normalizada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_n (T(x_n) - \lambda x_n) = 0.$$

Demostración. Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $C > 0$ tal que

$$\|(T - \lambda I)(x)\| = \|T(x) - \lambda x\| \geq C\|x\| \tag{4.14}$$

para todo $x \in E$. Ésto implica que $T - \lambda I$ es un isomorfismo topológico en la imagen $\operatorname{Im}(T - \lambda I)$, aunque no puede ser suprayectiva ya que λ pertenece al espectro de T por ser éste un conjunto cerrado. Fijemos $x_0 \in E$ con $d(x_0, \operatorname{Im}(T - \lambda I)) \geq 1$.

Tomando una sucesión $(\lambda_n)_n$ convergente hacia λ con $T - \lambda_n I$ inversible deducimos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe x_n tal que $Tx_n - \lambda_n x_n = x_0$. Entonces $Tx_n - \lambda x_n - x_0 = \lambda_n x_n - \lambda x_n$, lo que implica $|\lambda_n - \lambda|\|x_n\| \geq 1$ y así $\lim_n \|x_n\| = +\infty$. Pero

$$\begin{aligned}(T - \lambda I)\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) &= (T - \lambda_n I)\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) + (\lambda_n - \lambda)\frac{x_n}{\|x_n\|} \\ &= \frac{x_0}{\|x_n\|} + (\lambda_n - \lambda_)\frac{x_n}{\|x_n\|}.\end{aligned}$$

Así pues

$$\left\|(T - \lambda I)\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| \leq \frac{\|x_0\|}{\|x_n\|} + |\lambda_n - \lambda|$$

converge hacia cero, lo que contradice (4.14). $\square$

Definición 4.5.10. *Sean $\alpha, \beta > 0$ y C un cono. Diremos que un tipo $\sigma \in C$ es (α, β, C)-aproximante si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada entorno V de σ existe $\tau \in V \cap C$ tal que*

$$|(\tau * \alpha\tau)(x) - (\beta\tau)(x)| < \varepsilon$$

para cada $x \in E$.

Como la topología de $T(E)$ es metrizable, tenemos la siguiente caracterización: σ es (α, β, C)-aproximante si y sólo existe una sucesión $(\tau_n)_n$ de elementos de C que es convergente (puntualmente) hacia σ y verifica

$$|(\tau_n * \alpha\tau_n)(x) - (\beta\tau_n)(x)| < \frac{1}{n} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Lema 4.5.11. *Sea C un cono. Dado $\alpha \geq 0$ existe $\beta \in [1, 1+\alpha]$ verificando: para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un tipo $\sigma_n \in C_1$ tal que*

$$|(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(x) - (\beta\sigma_n)(x)| \leq \frac{1}{n} \text{ para cada } x \in E.$$

Demostración. Sea $\sigma \in C_1$ y $(F, \|\cdot\|_\sigma)$ el *spreading model* asociado a σ donde abusamos de notación para denotar la norma igual que en c_{00}. Definimos un operador $T : (c_{00}, \|\cdot\|_\sigma) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\sigma)$ como $T(e_n) = e_{2n} + \alpha e_{2n+1}$ donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ son los vectores de la base canónica. Vamos a probar que dicho operador satisface la desigualdad

$$\|x\|_\sigma \leq \|T(x)\|_\sigma \leq (1+\alpha)\|x\|_\sigma \tag{4.15}$$

para cada $x \in c_{00}$. La segunda desigualdad es consecuencia de

$$\begin{aligned}
\left\| T\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j\right)\right\|_\sigma &= \left\|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (e_{2j} + \alpha e_{2j+1})\right\|_\sigma = \left\|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_{2j} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \alpha e_{2j+1}\right\|_\sigma \\
&= (\alpha\lambda_1\sigma * \ldots * \alpha\lambda_k\sigma * \lambda_1\sigma * \ldots * \lambda_k\sigma)(0) \\
&= (\alpha(\lambda_1\sigma * \ldots * \lambda_k\sigma) * (\lambda_1\sigma * \ldots * \lambda_k\sigma))(0) \\
&\leq (1+\alpha)(\lambda_1\sigma * \ldots * \lambda_k\sigma)(0) = (1+\alpha)\left\|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j\right\|_\sigma
\end{aligned}$$

donde hemos usado que para un tipo débil τ

$$(\alpha\tau * \tau)(0) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{U}} \|a_n + \alpha a_m\| \leq (1+\alpha) \lim_{k,\mathscr{U}} \|a_k\| = (1+\alpha)\tau(0).$$

Por otro lado, usando la invarianza en primer lugar, el hecho de que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base 1-incondicional de $(F, \|\cdot\|_\sigma)$ y la condición 3. de la proposición 4.1.3 se deduce

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_{2j}\right\|_\sigma \leq \|T(x)\|_\sigma.$$

Por densidad podemos extender $T : c_{00} \to c_{00}$ a $T : (F, \|\cdot\|_\sigma) \to (F, \|\cdot\|_\sigma)$ (lo denotamos igual para no complicar la notación), operador lineal y continuo que sigue verificando las desigualdades (4.15) por continuidad.

Usando la simetría de σ y que la base canónica de c_{00} es base 1-incondicional se deduce que

$$\|T(x) - e_1\|_\sigma = \|T(x) + e_1\|_\sigma \geq \|e_1\|_\sigma = \sigma(0) = 1$$

para cada $x \in c_{00}$, desigualdad que se extiende por densidad a todo el *spreading model* F. Como consecuencia e_1 no pertenece a la imagen de $\mathrm{Im}(T)$, con lo que 0 está en el espectro de T, $\mathrm{spec}(T)$. Llamando β al supremos de $\mathrm{spec}(T) \cap [0, \infty)$ (que es finito pues el espectro de un operador es siempre un conjunto acotado) tenemos que β está necesariamente en la frontera de $\mathrm{spec}(T)$. La proposición 4.5.9 nos permite afirmar que existe $(x_n)_n$ sucesión normalizada en F tal que

$$\|T(x_n) - \beta x_n\|_\sigma < \frac{1}{n} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como c_{00} es denso en F podemos suponer que $x_n \in c_{00}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, dado x_n existe $x'_n \in c_{00}$ con $\|x_n - x'_n\| < \delta_n$ (donde δ_n es un número real positivo, en principio arbitrario, pero que determinaremos después). Llamando $x''_n = x'_n/\|x'_n\|$ se verifica

$$\begin{aligned}\|T(x''_n) - \beta x''_n\|_\sigma &\leq \|T(x''_n) - T(x_n)\|_\sigma + \|\beta x''_n - \beta x_n\|_\sigma + \|T(x_n) - \beta x_n\| \\ &\leq (1+\alpha+\beta)\|x''_n - x_n\|_\sigma + \|T(x_n) - \beta x_n\|_\sigma \\ &\leq (1+\alpha+\beta)2\delta_n + \|T(x_n) - \beta x_n\|_\sigma\end{aligned}$$

con lo que podemos tomar $\delta_n > 0$ suficientemente pequeño para que $\|T(x''_n) - \beta x''_n\|_\sigma < 1/n$.

Observemos que $1 \leq \|T(x_n)\|_\sigma \leq 1+\alpha$ por la ecuación (4.15), luego $\beta = \lim_n \|T(x_n)\|_\sigma \in [1, 1+\alpha]$. Supongamos ahora que

$$x_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^n e_i \qquad \text{y} \qquad T(x_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^n e_{2i} + \lambda_i^n \alpha e_{2i+1}.$$

Definimos

- $\sigma_n := (\lambda_1^n \sigma * \ldots * \lambda_{k_n}^n \sigma)$ que pertenece a $C_1 \subseteq C$ pues $\sigma_n(0) := \|x_n\|_\sigma = 1$.
- $\tau_n = \lambda_1^n \sigma * \lambda_1^n \alpha\sigma * \ldots * \lambda_{k_n}^n \sigma * \lambda_{k_n}^n \alpha\sigma = (\lambda_1^n \sigma * \ldots * \lambda_{k_n}\sigma) * \alpha(\lambda_1^n \sigma * \ldots * \lambda_{k_n}\sigma) = \sigma_n * \alpha\sigma_n$ que pertenece a C.

Entonces $\|x + T(x_n)\|_\sigma = \tau_n(x)$ por la definición de τ_n, y $(\beta\sigma_n)(x) = \|x + \beta x_n\|_\sigma$ para cada $x \in E$. Luego

$$|(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(x) - (\beta\sigma_n)(x)| = |\|x + T(x)\|_\sigma - \|x + \beta x_n\|_\sigma| \leq \|T(x_n) - \beta x_n\|_\sigma < \frac{1}{n}$$

para cada $x \in E$. □

Corolario 4.5.12. *Sea C un cono minimal. Dado $\alpha \geq 0$ existe $\beta \in [1, 1+\alpha]$ tal que cada elemento de C es (α, β, C)-aproximante.*

Demostración. Sea $\beta \in [1, 1+\alpha]$ obtenido como en el lema 4.5.11 y consideremos

$$A = \{\sigma \in C : \ \sigma \text{ es } (\alpha, \beta, C)\text{-aproximante } \}.$$

Vamos a probar que A es un cono, y por minimalidad deduciremos que $A = C$.

(1) $A \supsetneq \{0\}$, ya que para el β escogido la sucesión del lema 4.5.11 admite una subsucesión convergente (por la compacidad de C_1) hacia un elemento de C_1 que es claramente (α, β, C)-aproximante, de manera que pertenece a $A \setminus \{0\}$.

(2) *A es cerrado*: sea $\sigma \in \overline{A}$, $\varepsilon > 0$ y V entorno abierto de σ. Existe entonces un elemento $\sigma_1 \in V \cap A$ que es (α,β,C)-aproximante. Como V también es un entorno de σ_1 existe $\tau \in C \cap V$ con

$$|(\tau * \alpha\tau)(x) - (\beta\tau)(x)| < \varepsilon$$

Ya que $\varepsilon > 0$ era arbitrario hemos probado que σ también es (α,β,C)-aproximante y, por tanto, pertence a A.

(3) Sea $\sigma \in A$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 0$ entonces $\lambda\sigma = 0 \in A$ (obviamente el tipo nulo 0 verifica $0 * \alpha 0 = \beta 0$).
- Si $\lambda \neq 0$ y $k \in \mathbb{N}$ verifica $k > |\lambda|$, fijemos sucesión τ_n convergente (puntualmente) hacia σ y verificando

$$|(\tau_n * \alpha\tau_n)(x) - (\beta\tau_n)(x)| < \frac{1}{n}.$$

Entonces la subsucesión σ_{kn} verifica

$$\begin{aligned}|(\lambda\sigma_{kn} * \alpha\lambda\sigma_{kn})(x) - (\beta\lambda\sigma_{kn})(x)| &= |\lambda| \cdot \left|(\sigma_{kn} * \alpha\sigma_{kn})\left(\frac{x}{\lambda}\right) - (\beta\sigma_{kn})\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right| \\ &< \frac{|\lambda|}{kn} \leq \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

y además $\lambda\sigma_{kn}$ es convergente hacia $\lambda\sigma$, con lo que $\lambda\sigma$ es (α,β,C)-aproximante.

(4) *A es cerrado para el producto de convolución*: Sean $\sigma, \tau \in A$, $\varepsilon > 0$ y V entorno abierto de $\sigma * \tau$. Por la continuidad separada existe un entorno W de τ tal que $\sigma * \tau_0 \in V$ para cada $\tau_0 \in W$. Como $\tau \in A$, existe $\tau_1 \in W$ tal que

$$|(\tau_1 * \alpha\tau_1)(x) - (\beta\tau_1)(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $x \in E$.

Pero $\sigma \mapsto \sigma * \tau_1$ también es continua, luego existe un entorno U de σ tal que su imagen a través de dicha aplicación está contenida en V. Usando ahora que $\sigma \in A$ podemos encontrar $\sigma_1 \in U$ con

$$|(\sigma_1 * \alpha\sigma_1)(x) - (\beta\sigma_1)(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $x \in E$. Observar que para cualquier tipo débil $s = \lim_{n,\mathscr{U}} x_n$, como

$$(\sigma_1 * \alpha\sigma_1 * s)(x) = (s * \sigma_1 * \alpha\sigma_1)(x) = \lim_n (\sigma_1 * \alpha\sigma_1)(x + x_n)$$

y

$$(\beta\sigma_1 * s)(x) = (\beta\sigma_1 * s)(x) = \lim_n (\beta\sigma_1)(x + x_n)$$

por la asociatividad y conmutatividad. De esta manera

$$|(\sigma_1 * \alpha\sigma_1 * s)(x) - (\beta\sigma_1 * s)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lo mismo se puede razonar con τ_1.

Usando lo anterior deducimos que $(\sigma_1 * \tau_1) \in V$ verifica

$$
\begin{aligned}
&|((\sigma_1 * \tau_1) * \alpha(\sigma_1 * \tau_1))(x) - (\beta(\sigma_1 * \tau_1)(x)| \leq \\
&\leq |((\sigma_1 * \tau_1) * \alpha(\sigma_1 * \tau_1))(x) - (\beta\sigma_1 * (\tau_1 * \alpha\tau_1))(x)| + \\
&|(\beta\sigma_1 * (\tau_1 * \alpha\tau_1))(x) - (\beta(\sigma_1 * \tau_1))(x)| \\
&\leq |((\sigma_1 * \alpha\sigma_1) * (\tau_1 * \alpha\tau_1))(x) - (\beta\sigma_1 * (\tau_1 * \alpha\tau_1))(x)| + \\
&|((\tau_1 * \alpha\tau_1) * \beta\sigma_1)(x) - (\beta\tau_1 * \beta\sigma_1)(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

Corolario 4.5.13. *Dado $\alpha \geq 0$ existe $\beta \geq 1$ tal que cada tipo $\sigma \in C_1$ es límite de una sucesión (α, β)-aproximante de C_1.*

Demostración. Sea $\sigma \in C_1$. El corolario anterior garantiza la existencia de una sucesión $(\sigma_n)_n \subseteq C$ que sea (α, β)-aproximante que converja a σ. Como $\sigma_n(0)$ converge a $\sigma(0) = 1$ podemos suponer que $\sigma_n(0) \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Llamando $\lambda_n = (\sigma_n(0))^{-1}$ y tomando una sucesión $k_n \geq 1 + |\lambda_n|$ deducimos que $\tau_n = \lambda_{nk_n}\sigma_{nk_n}$ es una sucesión que converge puntualmente hacia σ y verifica

$$
|(\tau_n * \alpha\tau_n) - \beta\tau_n| \leq k_n |(\sigma_{nk_n} * \alpha\sigma_{nk_n}) - \beta\sigma_{nk_n}| \leq \frac{1}{n}.
$$

Luego $(\tau_n)_n \subseteq C_1$ es la sucesión que buscamos. □

Para la parte final de la sección vamos a presentar un razonamiento diferente al que se desarrolla en [7]. En dicho artículo se refieren a un resultado de Namioka [60] sobre la existencia de puntos de continuidad conjunta de funciones separadamente continuas bajo ciertas hipótesis sobre el dominio. Con el fin de hacer el capítulo más autocontenido vamos a adaptar el razonamiento de [66] (caso estable) al caso débilmente estable.

Recordar que un subconjunto de un espacio topológico se dice que es un G_δ si se puede escribir como intersección numerable de abiertos del espacio.

Proposición 4.5.14. *Sean $(X,d), (Y,\rho), (Z,\sigma)$ espacios métricos y $f : X \times Y \to Z$ una función separadamente continua. Si F es un subconjunto cerrado de Z entonces $f^{-1}[F]$ es un conjunto G_δ en $X \times Y$.*

Demostración. La sucesión de conjuntos abiertos $F_n = \bigcup_{z \in F} B_\sigma(z, \frac{1}{n})$ verifica $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ por ser F un conjunto cerrado. Fijado $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, el conjunto $A_{n,x} := B(x, \frac{1}{n}) \times \{y \in Y : f(x,y) \in F_n\}$ es un abierto en $X \times Y$, en virtud de la continuidad separada de la función f. Para la sucesión de abiertos $G_n = \bigcup_{x \in X} A_{n,x}$ en $X \times Y$, consideramos el conjunto G_δ dado por $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Vamos a comprobar que $f^{-1}[F] = C$.

Si $(x,y) \in f^{-1}[F]$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f(x,y) \in F_n$, luego $(x,y) \in A_{x,n} \subseteq G_n$. Recíprocamente, supongamos que $(x',y') \in C$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de $f(\cdot, y')$ sabemos que existe $n_0 > 2n$ tal que si $d(x,x') < 1/n_0$ entonces $\sigma(f(x,y), f(x',y)) < 1/(2n)$. Como $(x',y') \in G_{n_0}$ tenemos que existe $x \in X$ tal que $d(x',x) < 1/n_0$ y $f(x,y') \in F_{n_0}$, donde esta última condición significa que existe $z \in F$ con $\sigma(z, f(x,y')) < 1/n_0$. Usando entonces la desigualdad triangular deducimos que

$$\sigma(f(x',y'),z) \leq \sigma(f(x',y'), f(x,y')) + \sigma(f(x,y'),z) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{n_0} < \frac{1}{n},$$

Hemos probado $f(x',y') \in F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde $(x',y') \in f^{-1}[F]$. □

Proposición 4.5.15. *Sean $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ espacios topológicos donde (Y,τ_2) posee una base numerable de abiertos y $f : (X;\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ una aplicación tal que $f^{-1}[C]$ es un G_δ para cada subconjunto cerrado C de X. Entonces el conjunto de puntos de discontinuidad de f es un conjunto de primera categoría en X.*

Demostración. Sea $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de abiertos en Y. Notemos que $x \in X$ es un punto de discontinuidad de f si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-1}[B_n]$ pero $x \notin \operatorname{int}(f^{-1}[B_n])$. En otras palabras, el conjunto de puntos de discontinuidad de f se puede escribir como

$$D(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[B_n] \setminus \operatorname{int}(f^{-1}[B_n]).$$

Por hipótesis, cada conjunto $f^{-1}[Y \setminus B_n] = X \setminus f^{-1}[B_n]$ es un G_δ, de modo que $f^{-1}[B_n]$ es una unión numerable de cerrados $f^{-1}[B_n] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_{k,n}$. En particular,

$$f^{-1}[B_n] \setminus \operatorname{int}(f^{-1}[B_n]) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_{k,n} \setminus \operatorname{int}(f^{-1}[B_n])$$

es también una unión de cerrados con interior vacío ya que $f^{-1}[B_n] \setminus \operatorname{int}(f^{-1}[B_n])$ posee interior vacío. Esto prueba que $D(f)$ es unión numerbale de cerrados con interior vacío (densos en ninguna parte) luego se trata de un conjunto de primera categoría. □

Corolario 4.5.16. *Sean $(X,d),(X_1,d_1),(X_2,d_2)$ espacios métricos y supongamos además que (X,d) es completo. Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $g_n : X \to X_1 \times X_2$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones separadamente continuas $f_n : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$. Existe $x_0 \in E$ tal que $f_n \circ g_n$ es continua en x_0 para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si C es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ entonces $f_n^{-1}[C]$ es un conjunto G_δ en $X_1 \times X_2$ por la proposición 4.5.14. Como g_n es continua se tiene que $g_n^{-1}[f_n^{-1}[C]]$ también es un G_δ. Dado que $\mathbb{R}$ tiene base de abiertos numerable podemos aplicar la proposición 4.5.15 y deducir que cada conjunto D_n es de primera categoría en X. El teorema de Baire nos dice que $X \neq \bigcup_n D_n$, luego existe un punto de continuidad común a todas las funciones. □

Enunciamos ya el resultado fundamental del capítulo.

Teorema 4.5.17. *Sea E un espacio de Banach débilmente estable de dimensión infinita que no contiene copias de ℓ^1. Entonces existe un ℓ^p-tipo para algún $(1 < p < \infty)$ o un c_0-tipo sobre E.*

Demostración. Sea $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de E y C un cono minimal en $T^s_{wn}(E)$. Para cada $q \in \mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$ definimos la aplicación $g_q : C_1 \to T^s_{wn}(E) \times T^s_{wn}(E)$ dada por $g_q(\sigma) = (\sigma, q\sigma)$. Notemos que se trata de una aplicación continua sin más que usar la caractización de continuidad por sucesiones, que es válida ya que $T^s_{wn}(E)$ es metrizable.

Por otro lado consideremos la sucesión de aplicaciones $f_n : T^s_{wn}(E) \times T^s_{wn}(E) \to [0,\infty)$ definida como $f(\sigma,\tau) = (\sigma * \tau)(x_n)$. Se trata de una aplicación separadamente continua por el corolario 4.3.20.

Componiendo las aplicaciones anteriores obtenemos para cada $q \in \mathbb{Q}_+$ y cada $n \in \mathbb{N}$

$$h_{n,q}(\sigma) = (f_n \circ g_q)(\sigma) = (\sigma * q\sigma)(x_n).$$

Como el conjunto C_1 es compacto, en particular es completo luego podemos aplicar el corolario 4.5.16 para obtener un elemento $\overline{\sigma} \in C_1$ tal que $h_{n,q}$ es continua en dicho punto para cada $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Q}_+$.

Por el corolario 4.5.13, para cada $q \in \mathbb{Q}_+$ existe $\beta_q \in [1, 1+q]$ tal que $\overline{\sigma} \in C_1$ es límite de una sucesión (q,β_q)-aproximante $(\sigma_{m,q})_m \subseteq C_1$. Probaremos a continuación que

$$\overline{\sigma} * q\overline{\sigma} = \beta_q \overline{\sigma} \text{ para cada } q \in \mathbb{Q}_+.$$

Fijado $q \in \mathbb{Q}_+$

$$\begin{aligned}(\overline{\sigma} * q\overline{\sigma})(x_n) &= h_{n,q}(\overline{\sigma}) = \lim_m h_{n,q}(\sigma_{m,q}) = \lim_m (\sigma_{m,q} * q\sigma_{m,q})(x_n) \\ &= \lim_m (\beta_q \sigma_{m,q})(x_n) = (\beta_q \overline{\sigma})(x_n).\end{aligned}$$

Dado $\alpha \geq 0$ podemos elegir una sucesión de racionales $(q_n)_n$ con $0 \leq q_n \leq \alpha$ que converge hacia α. Como la correspondiente sucesión β_{q_n} está contenida en $[1, 1+\alpha]$ podemos suponer que es convergente hacia un cierto $\beta \in [1, 1+\alpha]$ tomando una subsucesión suya. De este modo

$$\overline{\sigma} * \alpha\overline{\sigma} = \lim_n (\overline{\sigma} * q_n\overline{\sigma}) = \lim_n (\beta_{q_n}\overline{\sigma}) = \beta\overline{\sigma}.$$

Deducimos que σ es un ℓ^p tipo o un c_0-tipo por el lema 4.5.5 y la prueba está completa por el teorema 4.5.2. □

Es ahora inmediato probar el siguiente resultado fundamental.

Teorema 4.5.18. *Si E es un espacio de Banach infinito-dimensional débilmente estable entonces E contiene un subespacio isomorfo casi-isométricamente a un ℓ^p para algún $p \in [1,\infty)$ o bien a c_0.*

Demostración. Si E contiene una copia isomorfa a ℓ^1 entonces también posee una copia casi-isométrica de dicho espacio por el lema 4.1.7. En caso contrario, podemos combinar los teoremas 4.5.17 y 4.5.2 para concluir el resultado. □

Apéndices

Apéndice A

$\mathscr{F}$-bases y propiedad del subcubrimiento

EL presente capítulo contiene gran parte de los resultados obtenidos en un trabajo de investigación conjunto con los Profesores Antonio Avilés (Universidad de Murcia), Vladimir Kadets (Universidad de Kharkov, Ucrania) y Slawomir Solecki (Universidad de Urbana-Champaign, Illinois, USA).

La motivación del trabajo proviene del problema de determinar cuándo los funcionales e_k^* de una $\mathscr{F}$-base (definición A.1.4) de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ son continuos. En las bases de Schauder (definición 4.1.1), las aplicaciones $e_k^* : E \to \mathbb{R}$ que asocian a cada elemento x los correspondientes coeficientes $e_k^*(x) = a_k$ son funcionales lineales y continuos. Sin embargo, para las $\mathscr{F}$-bases la continuidad de los funcionales no está clara.

Durante la *IV conferencia sobre Integration, Vector Measures and Related Topics*, el profesor Vladimir Kadets preguntó si es cierto que los funcionales e_k^* de una $\mathscr{F}$-base son necesariamente continuos. Por supuesto, si $\mathscr{F}$ tiene un conjunto finito entre sus elementos entonces el espacio E es necesariamente finito-dimensional y la cuestión es trivialmente afirmativa. Por ello suponemos que los filtros $\mathscr{F}$ con los que trabajamos son más finos que el filtro de Fréchet.

Tomasz Kochanek [49] dió una respuesta parcial afirmativa a esta cuestión, mostrando que si $\mathscr{F}$ es un filtro que admite una base de cardinal menor que el número de pseudointersección $\mathfrak{p}$ (más adelante explicaremos con más detalle de qué cardinal se trata) entonces la respuesta es afirmativa. La prueba de Kochanek se basa en el teorema de de la aplicación abierta y en el teorema de la categoría de Baire, ingredientes que ya se usan en el resultado clásico sobre la continuidad de los funcionales de una base de Schauder.

Posteriormente, Vladimir Kadets señaló que la demostración se podría extender a filtros que tuvieran una propiedad del siguiente tipo: para cada espacio métrico completo X y cada familia de subconjuntos de primera categoría $\{X_A : A \in \mathscr{F}\}$ en X verificando que $A \subseteq^* B$ (i.e. $A \setminus B$ es finito) implica $X_B \subseteq X_A$, se tiene que $\bigcup_{A\in\mathscr{F}} X_A \neq X$. Notar que se trata de una "extensión" del teorema de Baire

En la primera sección vamos a introducir el concepto de $(D, \leq)$-subcubrimiento (definición A.1.1) motivado por la propiedad anterior; así como el de ideal $\mathscr{I}$, una noción dual a la de filtro. Daremos algunos resultados relacionados cuando trabajamos con familia de subconjuntos de primera categoría en un espacio métrico completo X.

En la segunda sección introduciremos con más detalle el problema de las $\mathscr{F}$-bases y expondremos en detalle una versión ligeramente modificada de la prueba de Kochanek para hacerla válida para filtros que verifican la propiedad que hemos mencionado antes. Daremos en términos de la propiedad del cubrimiento una condición suficiente sobre un filtro $\mathscr{F}$ que garantice que los funcionales e_k^* que dan los coeficientes de la $\mathscr{F}$-base son continuos.

En la siguiente sección definiremos el concepto de $\mathscr{I}$ ideal X-Baire, propiedad que se inspira en el teorema de Baire de espacios métricos completos, y que intenta generalizar este teorema de familias numerables de conjuntos densos en ninguna parte a familias a familia del mismo tipo $\{X_A : A \in \mathscr{I}\}$ pero indexadas en el ideal $\mathscr{I}$. Daremos caracterizaciones de los ideales para los que esta generalización del teorema de Baire es cierto, y estudiaremos si ciertas clases de ideales poseen dicha propiedad, como por ejemplo los ideales analíticos y una generalización de P-ideales no numerablemente generados que introduciremos.

La última sección presenta un resultado en el que sustituimos las familias de conjuntos densos en ninguna parte por familias de subconjuntos compactos del espacio topológico X.

A.1. Propiedad del subcubrimiento e ideales

Recordar que una relación binaria $\leq$ sobre un conjunto S se dice que es relación de preorden si verifica las propiedades reflexiva y transitiva. En ese caso diremos que $(S,\leq)$ es un conjunto preordenado.

Definición A.1.1. *Sea X un espacio topológico, $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos de X cuya unión es X, y $(S,\leq)$ un conjunto preordenado. Diremos que $\mathscr{A}$* tiene un $(S,\leq)$-subcubrimiento de X *(o que $(S,\leq)$* cubre X con $\mathscr{A}$*) si existe una aplicación monótona creciente*

$$f : (S,\leq) \to (\mathscr{A},\subseteq)$$

tal que $\bigcup_{d\in S} f(d) = X$.

Vamos a comenzar estudiando esta noción en el caso particular en que:

- El conjunto preordenado es un filtro $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{N}$ que contiene a los todos los conjuntos cofinitos (es decir, es más fino que el filtro de Fréchet) con la relación de preorden $\leq$ dada por
$$A \leq B \text{ si y sólo si } B \subseteq^* A$$
donde $B \subseteq^* A$ significa que $B \setminus A$ es finito.
- $\mathscr{A}$ será $\operatorname{Meag}(X)$ la familia de los subconjuntos de primera categoría de un espacio topológico X (la notación procede del término inglés *meagre* usado para denominar a este tipo de subconjuntos). Recordar que un subconjunto de un espacio topológico X se dice que es *raro o denso en ninguna parte* si su adherencia tiene interior vacío; y se dice que es *de primera categoría en X* si es unión numerable de subconjuntos raros de X.
- El espacio topológico X será un espacio métrico completo sin puntos aislados (para poder garantizar que $\operatorname{Meag}(X)$ cubre todo el espacio).

La relación de preorden definida sobre $\mathscr{F}$ parece poco natural en el sentido de que estamos invirtiendo con respecto a la inclusión. Para evitar esto podemos recurrir a un concepto dual al de filtro que es lo que se conoce como ideal.

Definición A.1.2. *Una familia $\mathscr{I}$ no vacía de subconjuntos de $\mathbb{N}$ se dice que es un* ideal *(sobre $\mathbb{N}$) si verifica las propiedades:*

(I) Si $A \subseteq B$ y $B \in \mathscr{I}$ entonces $A \in \mathscr{I}$.
(II) Si $A, B \in \mathscr{I}$ entonces $A \cup B \in \mathscr{I}$.
(III) El conjunto total $\mathbb{N} \notin \mathscr{I}$.

De acuerdo con la definición anterior, $\mathscr{I}$ es un ideal sobre $\mathbb{N}$ si y sólo si la familia de los complementarios de elementos de $\mathscr{I}$

$$\mathscr{F} := \{\mathbb{N} \setminus I : I \in \mathscr{I}\}$$

es un filtro sobre $\mathbb{N}$. En este caso diremos que $\mathscr{I}$ es el *ideal dual* de $\mathscr{F}$. Por ejemplo, para el filtro de Fréchet (o filtro de los complementos finitos), su ideal dual es Fin la familia de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Todas las propiedades que hemos estudiado sobre filtros pueden traducirse en términos de ideales usando esta dualidad. Por ejemplo, diremos que una subfamilia $\beta \subseteq \mathscr{I}$ es una base de $\mathscr{I}$ si para cada $A \in \mathscr{I}$ existe $B \in \beta$ con $A \subseteq B$.

Como vamos a trabajar con filtros que contienen a todos los conjuntos cofinitos, esta propiedad se traduce en que a lo largo del capítulo supondremos siempre que $Fin \subseteq \mathscr{I}$.

Proposición A.1.3. *Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$, $\mathscr{I}$ su ideal dual, y X espacio métrico completo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $(\mathscr{F}, \leq)$ cubre X con $\mathrm{Meag}(X)$.
(b) $(\mathscr{I}, \subseteq^*)$ cubre X con $\mathrm{Meag}(X)$.
(c) $(\mathscr{I}, \subseteq)$ cubre X con $\mathrm{Meag}(X)$.

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) es clara ya que la asignación $A \mapsto \mathbb{N} \setminus A$ establece una biyección entre $\mathscr{F}$ e $\mathscr{I}$ con la propiedad de que $A \leq B$ si y sólo si $\mathbb{N} \setminus A \subseteq^* \mathbb{N} \setminus B$. Ésto permite establecer una correspondencia entre las funciones monótonas $f : (\mathscr{F}, \leq) \to \mathrm{Meag}(X)$ y $g : (\mathscr{I}, \subseteq^*) \to \mathrm{Meag}(X)$ de manera natural.

La implicación (b) $\Rightarrow$ (c) es clara pues si $f : (\mathscr{I}, \subseteq^*) \to \mathrm{Meag}(X)$ es una función monótona tal que $\bigcup_{I \in \mathscr{I}} f(I) = X$ entonces la misma función es también monótona vista como $f : (\mathscr{I}, \subseteq) \to \mathrm{Meag}(X)$, de donde se deduce (c).

Recíprocamente, supongamos que existe una función $g : (\mathscr{I}, \subseteq) \to \mathrm{Meag}(X)$ que es monótona para los órdenes indicados y verifica $\bigcup_{I \in \mathscr{I}} g(I) = X$. Podemos definir entonces una nueva función $h : \mathscr{I} \to \mathrm{Meag}(X)$ como

$$h(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g(A \cup \{1, ..., n\})$$

para cada $A \in \mathscr{I}$. Notar que $A \cup \{1, ..., n\} \in \mathscr{I}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ ya que $Fin \subseteq \mathscr{I}$, y $h(A)$ es efectivamente un conjunto de primera categoría en X al ser unión numerable de conjuntos que sí lo son. De este modo $h : (\mathscr{I}, \subseteq^*) \to \mathrm{Meag}(X)$ es monótona y además satisface

$$\bigcup_{A \in \mathscr{I}} h(A) = \bigcup_{A \in \mathscr{I}} g(A) = X.$$

□

En la siguiente subsección vamos a mostrar una aplicación de estas nociones en espacios de Banach.

A.1.1. Aplicación a $\mathscr{F}$-bases

Las $\mathscr{F}$-bases son una generalización del concepto de base de Schauder de un espacio de Banach.

Definición A.1.4. *Dado un filtro $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{N}$ y un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ decimos que una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos en E es una $\mathscr{F}$-*base *de E si y sólo si para cada $x \in E$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$x = \lim_{n,\mathscr{F}} \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

en la topología de la norma.

En ese caso denotaremos $a_n = e_n^*(x)$ y $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Las aplicaciones $e_k^* \to \mathbb{R}$ son claramente lineales por las propiedades de los límites a través de filtros y la unicidad de los coeficientes.

Este tipo de bases, así como algunos conceptos más generales, han sido estudiados en [37] bajo la suposición adicional de que los funcionales e_k^* eran continuous.

Como hemos comentado en la introducción, Tomasz Kochanek [49] probó que si $\mathscr{F}$ es un filtro que admite una base de cardinal menor que el número de pseudointersección $\mathfrak{p}$ (más adelante explicaremos con más detalle de qué cardinal se trata) entonces los funcionales e_k^* son continuos, lo que incluye el caso de una base de Schauder. El profesor Vladimir Kadets hizo la observación de que una modificación de dicha prueba permitía obtener de manera más general: *si el filtro $\mathscr{F}$ verifica que $(\mathscr{F}, \leq)$ no cubre E con* $\mathrm{Meag}(E)$ *entonces cualquier $\mathscr{F}$-base de E tiene sus funcionales e_k^* continuos*. Vamos a ofrecer una demostración detallada de este hecho modificando la prueba del artículo de Kochanek [49]. Comenzamos primero con un lema.

Lema A.1.5. *Sea $\mathscr{F}$ un filtro y $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una $\mathscr{F}$-base de un espacio de Banach E. Para cada $A \in \mathscr{F}$ consideramos*

$$E_A := \{x \in E : \sup_{k \in A} \|S_k(x)\| < \infty\}$$

y el funcional $\|\cdot\|_A : E_A \to [0, \infty)$ definido por

$$\|x\|_A = \sup_{k \in A} \|S_k(x)\|.$$

Entonces $(E_A, \|\cdot\|_A)$ es un espacio de Banach con $\|\cdot\|_A \geq \|\cdot\|$.

Demostración. El hecho de que E_A es un subespacio es una consecuencia inmediata de la linealidad de las S_k. Para ver que $\|\cdot\|_A$ es una norma en X_A, notemos primero que $\|x\| \leq \|x\|_A$ para cada $x \in E_A$. En efecto, supongamos que $\|x\|_A < \delta$. Para cada $\eta > 0$ existe $B \in \mathscr{F}$ tal que $k \in B$ implica $\|S_k(x) - x\| < \eta$, con lo que si $k \in A \cap B$ entonces la desigualdad triangular nos da

$$\|x\| \leq \|x - S_k(x)\| + \|S_k(x)\| \leq \eta + \|x\|_A < \eta + \delta.$$

Como $\eta > 0$ es arbitrario se deduce $\|x\| \leq \delta$.

Es claro que $\|\cdot\|_A$ es un funcional no negativo, y si $\|x\|_A = 0$ entonces $\|x\| = 0$, luego $x = 0$. El resto de propiedades de una norma son consecuencias inmediatas de la linealidad de los S_k y el hecho de que $\|\cdot\|$ sea una norma.

Afirmamos ahora que $(E_A, \|\cdot\|_A)$ es un espacio de Banach. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en dicho espacio. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq m$ entonces $\|S_k(x_p) - S_k(x_q)\| < \varepsilon$ para todo $k \in A$. Fijados p y q como antes, podemos elegir k de manera que $\|S_k(x_p) - x_p\| < \varepsilon/3$ y $\|S_k(x_q) - x_q\| < \varepsilon/3$. Estas tres desigualdades implican que $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$ si $p, q \geq m$. En otras palabras, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(E_A, \|\cdot\|)$. Por la completitud de E existe un elemento z en la $\|\cdot\|$-clausura de E_A tal que

$$\lim_n \|x_n - z\| = 0. \tag{A.1}$$

Afirmación: $z \in E_A$ y además $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en norma $\|\cdot\|_A$ hacia z.

Vamos a probar la afirmación. Comenzamos observando para cada $k \in A$ y $p, q \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\|S_k(x_p) - S_k(x_q)\| = \|S_k(x_p - x_q)\| \leq \|x_p - x_q\|_A,$$

lo que muestra que $(S_k(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$ para cada $k \in A$. Además cada uno de sus elementos $S_k(x_n)$ pertenece al subespacio finito-dimensional (y por tanto, cerrado) span$\{e_i : 1 \leq i \leq k\}$. Existe entonces $y_k \in$ span$\{e_i : 1 \leq i \leq k\}$ tal que

$$\lim_n \|S_k(x_n) - y_k\| = 0. \tag{A.2}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ denotemos por $\alpha_j = e_j^*(y_k)$ si $k \in A$ y $j \leq k$. Esta definición no depende de la elección del k, ya que si $j \leq k \leq l$ entonces la continuidad de e_j^* sobre el espacio finito-dimensional span$\{e_i : 1 \leq i \leq l\}$ nos da

$$e_j^*(y_k) = e_j^*(\lim_n S_k(x_n)) = \lim_n e_j^*(S_k(x_n)) = \lim_n e_j^*(S_l(x_n)) = e_j^*(y_l).$$

Vamos a probar ahora que

$$z = \lim_{n,\mathscr{F}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k,$$

o también $S_k(z) = y_k$ para cada $k \in A$. Para ello fijamos $\varepsilon > 0$ y elegimos $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $\|S_k(x_n) - S_k(x_m)\| < \varepsilon/3$ (para cada $k \in A$) y $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/3$. Ahora elegimos $B \in \mathscr{F}$ tal que para cada $k \in B$ se tenga que $\|S_k(x_m) - x_m\| < \varepsilon/3$. Entonces $A \cap B \in \mathscr{F}$ y para cada $k \in A \cap B$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\|y_k - z\| &= \|\lim_n S_k(x_n) - \lim_n x_n\| \\ &\leq \lim_n \|S_k(x_m) - S_k(x_n)\| + \|S_k(x_m) - x_m\| + \lim_n \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Ésto muestra que

$$z = \lim_{k,\mathscr{F}} y_k.$$

Además para cualquier $k \in A$ y $m \in \mathbb{N}$ elegido como antes se tiene que

$$\begin{aligned}\|y_k\| &\leq \|z\| + \lim_n \|S_k(x_m) - S_k(x_n)\| + \|S_k(x_m) - x_m\| + \lim_n \|x_m - x_n\| \\ &\leq \|z\| + \frac{1}{3}\varepsilon + \|S_k(x_m)\| + \|x_m\| + \frac{1}{3}\varepsilon \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \|z\| + \|x_m\|_A + \|x_m\|,\end{aligned}$$

lo que implica

$$\sup_{k\in A} \|S_k(z)\| = \sup_{k\in A} \|y_k\| < \infty,$$

luego $z \in E_A$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|x_n - z\|_A &= \sup_{k\in A} \|S_k(x_n) - S_k(z)\| = \sup_{k\in A} \|S_k(x_n) - \lim_m S_k(x_m)\| \\ &\leq \lim_m \sup_{k\in A} \|S_k(x_n) - S_k(x_m)\| = \lim_m \sup \|x_n - x_m\|_A,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\lim_n \|x_n - z\|_A = 0$ usando que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ era de Cauchy en $(E_A, \|\cdot\|_A)$. $\square$

Probamos ya el resultado que motiva esta sección.

Teorema A.1.6. *Supongamos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una $\mathscr{F}$-base de un espacio de Banach E. Si $(\mathscr{F}, \leq)$ no cubre E con* $\mathrm{Meag}(E)$ *entonces $e_n^* \in E^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La familia $\{E_A : A \in \mathscr{F}\}$ del lema anterior verifica las siguientes propiedades:

(a) Si $A \subseteq^* B$ entonces $E_B \subseteq E_A$. Para comprobarlo tomemos $x \in E_B$. Como $\sup_{k\in B} \|S_k(x)\| < \infty$ y $A \setminus B$ es finito entonces el supremo $\sup_{k\in A} \|S_k(x)\|$ también es finito y deducimos que $x \in E_A$.

(b) El espacio E es la unión de los E_A. En efecto, si $x \in E$ entonces por definición de límite a través de $\mathscr{F}$ existe $A \in \mathscr{F}$ tal que si $k \in A$ entonces $\|S_k(x) - x\| < 1$, luego $\sup_{k\in A} \|S_k(x)\| \leq 1 + \|x\|$ y se deduce $x \in E_A$.

Para cada $A \in \mathscr{F}$ consideramos la aplicación inclusión $i_A : (E_A, \|\cdot\|_A) \to (E, \|\cdot\|)$. Por el lema anterior sabemos que se trata de una aplicación continua (pues $\|\cdot\|_A \geq \|\cdot\|$) entre dos espacios de Banach. El teorema de la aplicación abierta [21, teorema 3.4.5, p. 278] afirma que se da una de las siguientes opciones:

(i) La imagen de E_A es de primera categoría en $(E, \|\cdot\|)$.

(ii) i_A es suprayectiva y abierta.

Afirmamos que para algún $A \in \mathscr{F}$ debe satisfacerse la propiedad (ii), ya que en caso contrario cada E_A sería de primera categoría en E y por las propiedades (a) y (b) tendríamos que $(\mathscr{F}, \leq)$ cubre E con $\mathrm{Meag}(E)$, contradiciendo la hipótesis del enunciado sobre el filtro $\mathscr{F}$. Fijemos entonces $A \in \mathscr{F}$ tal que i_A es suprayectiva y abierta. Como dicha aplicación es inyectiva, la aplicación inversa es lineal y continua, luego existe $K > 0$ tal que $\|S_k(x)\| \leq K\|x\|$ para cada $x \in E$ y $k \in A$.

Fijado $j \in \mathbb{N}$ arbitrario vamos a probar que e_j^* es continua. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de E tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $e_j^*(x_n)$ diverge hacia infinito. Fijemos ahora un índice $k \geq j$. Como los vectores $e_1, \ldots, e_k$ son linealmente independientes y el subespacio $\mathrm{span}\{e_i : 1 \leq i \leq k, i \neq j\}$ es cerrado (finito-dimensional) deducimos que

$$\delta = \text{ínf}\{\|e_j + y\| : y \in \mathrm{span}\{e_i : 1 \leq i \leq k, i \neq j\}\} > 0.$$

Dado que

$$S_k(x_n) = e_j^*(x_n)e_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{k} e_i^*(x_n)e_i$$

se verifica

$$\|S_k(x_n)\| \geq \delta |e_j^*(x_n)| \to \infty \qquad \text{si } n \to \infty,$$

lo que contradice el hecho de que cada S_k es continua. □

La cuestión natural ahora es saber qué filtros $\mathscr{F}$ verifican la condición de que $(\mathscr{F}, \leq)$ no cubre E con $\mathrm{Meag}(E)$ para cualquier espacio de Banach E. En virtud de la proposición A.1.3, esta pregunta se puede escribir también en términos de ideales: *¿qué ideales $\mathscr{I}$ sobre $\mathbb{N}$ verifican que $(\mathscr{I}, \subseteq)$ no cubre E con* $\mathrm{Meag}(E)$ *para cualquier espacio de Banach?*.

Una primera observación es que todo ideal que admita una base numerable (y por tanto todo filtro numerablemente generado) posee tal propiedad. En efecto, supongamos que $\mathscr{I}$ admite una base numerable β y sea $f : (\mathscr{I}, \subseteq) \to \mathrm{Meag}(E)$ una función monótona. Entonces

$$\bigcup_{A \in \mathscr{I}} f(A) = \bigcup_{B \in \beta} f(B)$$

es una unión numerable de conjuntos de primera categoría en E, luego también es de primera categoría en E. Por tanto, dicha unión no puede coincidir con E ya que todo espacio métrico completo es de segunda categoría en sí mismo por el teorema de la categoría de Baire.

Este razonamiento se puede generalizar para espacios métricos completos separables usando cardinales especiales. El número de pseudointersección $\mathfrak{p}$ (ver *pseudointersection number* en [35, 11B (c)]) es el menor cardinal para el que $P(\mathfrak{p}^+)$ es falso, donde $P(\kappa)$ es la siguiente afirmación: *si $\mathscr{A}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ con cardinalidad $|\mathscr{A}| < \kappa$ y $A_0 \cap A_1 \cap \ldots A_m$ es infinito para cualesquiera elementos de $\mathscr{A}$, entonces existe un subconjunto infinito $B \subseteq \mathbb{N}$ tal que $B \setminus A$ es finito para cada $A \in \mathscr{A}$*. Puede obtenerse una versión más general del teorema de la categoría de Baire para espacios métricos separables (o espacios polacos) X: la unión de menos de $\mathfrak{p}$ conjuntos de primera categoría en X es un conjunto de primera categoría (ver [35, 22C corollary]).

Recordar que el carácter $\chi(\mathscr{F})$ de un filtro $\mathscr{F}$ es el menor cardinal de una base de $\mathscr{F}$.

Corolario A.1.7. *[49] Si $\chi(\mathscr{F}) < \mathfrak{p}$ entonces toda $\mathscr{F}$-base de un espacio de Banach E verifica que los funcionales e_k^* son continuos para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si un espacio E posee una $\mathscr{F}$-base entonces es separable, ya que

$$\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es denso en E, de manera que no puede ser unión de menos de $\mathfrak{p}$ conjuntos de primera categoría por la versión de teorema de Baire que mencionábamos antes. Si β es una base de $\mathscr{F}$ de cardinal menor que $\mathfrak{p}$ entonces para cualquier función $f : (\mathscr{F}, \leq) \to \operatorname{Meag}(E)$ tendríamos que

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} E_A = \bigcup_{B \in \beta} E_B \neq E.$$

La primera igualdad se sigue del hecho de que para cada $A \in \mathscr{F}$ existe $B \in \beta$ con $B \subseteq A$, luego $A \leq B$ y $f(A) \subseteq f(B)$. Ésto prueba que $(\mathscr{F}, \leq)$ no cubre E con $\operatorname{Meag}(E)$, y podemos usar el teorema A.1.6 para deducir el resultado. $\square$

Si asumimos el axioma de Martin $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ (el cardinal del continuo) entonces todo ideal con carácter menor que $\mathfrak{c}$ verifica las hipótesis del corolario anterior.

A.2. Cubrimiento por conjuntos densos en ninguna parte

En lo que sigue (X, d) denotará a un espacio métrico completo.

Nuestro interés se centra en encontrar aquellos ideales $(\mathscr{I}, \subseteq)$ que no cubren espacios métricos completos X con $\operatorname{Meag}(X)$. En particular, este tipo de ideales no pueden cubrir los espacios métricos completos X con $\operatorname{NWD}(X)$ la familia de los subconjuntos raros o densos en ninguna parte (nowhere-dense). Parece razonable comenzar estudiando aquellos ideales $(\mathscr{I}, \subseteq)$ que verifican esta última propiedad más débil.

Por analogía con la teoría de categorías de Baire vamos a introducir la siguiente definición para simplificar.

Definición A.2.1. *Diremos que un ideal $\mathscr{I}$ sobre $\mathbb{N}$ es* X-Baire *si $\mathscr{I}$ no cubre X con* $\operatorname{NWD}(X)$. *En otras palabras, si para cada función monótona $f : (\mathscr{I}, \subseteq) \to \operatorname{NWD}(X)$ se tiene que*

$$\bigcup_{A \in \mathscr{I}} f(A) \neq X.$$

Como consecuencia del teorema de Baire se tiene que todo ideal $\mathscr{I}$ numerablemente generado es X-Baire para cada espacio métrico completo X. No está claro si existen más ideales que verifiquen esta propiedad.

Cuestión A.2.2. *¿Existen ideales no numerablemente generados que sean X-Baire para todo espacio métrico completo X?*

En esta sección discutiremos esta cuestión, ofreciendo una serie de resultados que caracterizan propiedades similares a la anterior cuando X varía en una cierta clase de espacios métricos completos. Probaremos también que para estudiar si un ideal $\mathscr{I}$ verifica la propiedad anterior podemos limitarnos a espacios con cardinal menor que $\mathfrak{c}$ (el cardinal del continuo).

Si D es un conjunto discreto infinito con la métrica $d(x,z) = 1$ si $x \neq z$ y $d(x,x) = 0$, entonces el producto cartesiano $D^{\mathbb{N}}$ equipado con la topología producto tiene estructura de espacio métrico con la distancia definida por

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(x_n,z_n)}{2^n}$$

para cualesquiera $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$.

Definición A.2.3. *Para un espacio topológico arbitrario Y se define su* peso $w(Y)$ *como el menor cardinal de una base de abiertos de Y.*

Para el espacio métrico anterior se tiene que $w(D^{\mathbb{N}}) = \kappa$ donde κ es el cardinal (infinito) de D. En efecto, la familia de todos los abiertos de la forma

$$\{x_1\} \times \ldots \times \{x_n\} \times D \times D \times \ldots.$$

con $x_1,\ldots,x_n \in D$, es una base de $D^{\mathbb{N}}$ que tiene cardinal κ. Por otro lado, cualquier base de abiertos tiene al menos un elemento contenido en $\{x\} \times D \times D \times \ldots$ para cada $x \in D$. Como éstos son κ conjuntos disjuntos, deducimos que el cardinal de dicha base es mayor o igual que κ.

Si $\sigma : \mathbb{N} \to D$ es un elemento de $D^{\mathbb{N}}$ denotaremos $\sigma|_0 = \emptyset$ y $\sigma|_k = (\sigma(1),\ldots,\sigma(k))$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. El conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de D se denotará por $D^{<\mathbb{N}}$. Si $t = (t_1,\ldots,t_n) \in D^{<\mathbb{N}}$ y $k \leq n$ escribiremos $t|_k = (t_1,\ldots,t_k)$. Dados elementos $s,t \in D^{<\mathbb{N}}$ escribiremos $s \preccurlyeq t$ si t es una extensión de s; es decir, si $s = (s_1,\ldots,s_k)$, $t = (t_1,\ldots,t_n)$ verifican $k \leq n$ y $t|_k = s$. Podemos claramente extender el orden anterior a $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ y $s = (s_1,\ldots,s_k) \in D^{<\mathbb{N}}$ escribiendo $s \preccurlyeq \sigma$ si $\sigma|_k = s$. Si s es como antes y $\alpha \in D$ denotaremos por $s\hat{\ }\alpha = (s_1,\ldots,s_k,\alpha)$ la sucesión finita que resulta de extender s añadiendo α al final.

Con esta notación, una base de abiertos de $D^{\mathbb{N}}$ es la familia $\{U_s : s \in D^{<\mathbb{N}}\}$ formada por los conjuntos de la forma

$$U_s := \{\sigma \in D^{\mathbb{N}} : \sigma \succcurlyeq s\}.$$

Notemos que $(D^{<\mathbb{N}},\preccurlyeq)$ se puede ver también como un árbol cuyo nodo-base es la sucesión vacía y los sucesores inmediatos de cada nodo s son los elementos de la forma $s\hat{\ }\alpha$ para todo $\alpha \in D$. Además cada elemento $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ puede identificarse con la rama del árbol

$$\{s \in D^{<\mathbb{N}} : s \preccurlyeq \sigma\} = \{\sigma|_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Toda función f definida sobre $D^{<\mathbb{N}}$ y tomando valores en un conjunto E puede considerarse como un árbol en E cuyos nodos son los $f(s)$ y cada par de nodos de la forma $(f(s), f(s\hat{\ }\alpha))$ están conectados por una arista.

Teorema A.2.4. *Sea D un conjunto discreto de cardinalidad κ. Para un ideal $\mathscr{I}$ sobre $\mathbb{N}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *$\mathscr{I}$ es X-Baire para cada espacio métrico completo X con peso $w(X) \leq \kappa$.*

(2) *$\mathscr{I}$ es $D^{\mathbb{N}}$-Baire.*

(3) *Si $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathscr{I})$ es una función monótona tal que para cada $s \in D^{\mathbb{N}}$*

  (a) $f(s)$ es hereditario, i.e., $A \subseteq B \in f(s)$ implica $A \in f(s)$.

  (b) $\mathscr{I} = \bigcup_{t \succcurlyeq s} f(t)$.

  Entonces existe una rama $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{s \preccurlyeq \sigma} f(s) = \mathscr{I}$.

(4) *Si $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathscr{I})$ es una función monótona tal que para cada $s \in D^{\mathbb{N}}$*

  (a) $f(s)$ es hereditario.

  (b) $\mathscr{I} = \bigcup_{\alpha \in D} f(s\hat{\ }\alpha)$.

  (c) $f(s) = \bigcap_{\alpha \in D} f(s\hat{\ }\alpha)$.

  Entonces existe una rama $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{s \preccurlyeq \sigma} f(s) = \mathscr{I}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) y (3) $\Rightarrow$ (4) son obvias.

(2) $\Rightarrow$ (3): Supongamos que tenemos una función $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathscr{I})$ como en (2). Podemos definir una aplicación $F : \mathscr{I} \to \mathrm{NWD}(D^{\mathbb{N}})$ como

$$F(A) = \{\sigma \in D^{\mathbb{N}} : A \notin f(\sigma|_k) \ \text{ para cada } k \in \mathbb{N}\}.$$

Cada conjunto $F(A)$ es cerrado ya que si σ no pertenece a $F(A)$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \in f(\sigma|_k)$. Por tanto $A \in f(\tau|_k)$ para cada $\tau \in D^{\mathbb{N}}$ con $\tau \succcurlyeq \sigma|_k$, de modo que $\sigma \in U_{\sigma|k} \subseteq X \setminus F(A)$. Por otro lado $F(A)$ es denso en ninguna parte ya que de lo contrario contendría un conjunto abierto U_s no vacío, y para cada $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ con $\sigma \succcurlyeq s$, el elemento σ pertenecería a $F(A)$. En otras palabras, $A \notin f(t)$ para cada $t \succcurlyeq s$ lo que entraría en contradicción con (b).

Usando la hipótesis (2) deducimos que existe un elemento $\sigma \in D^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{A \in \mathscr{I}} F(A)$. La rama que corresponde a σ verifica la condición que queremos ya que cualquier $A \in \mathscr{I}$ satisface $\sigma \notin F(A)$, lo que significa que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A \in f(\sigma|_{k_0})$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Consideremos una base de abiertos $\{W_\alpha : \alpha \in D\}$ (repitiendo elementos si es necesario). Vamos a construir un árbol $\{V_s : s \in D^{<\mathbb{N}}\}$ de la siguiente forma: $V_\emptyset = X$ y los elementos del siguiente nivel son $V_{(\alpha)} := W_\alpha$ para cada $\alpha \in D$. Supongamos que hemos construido el nodo V_s para $s \in D^{<\mathbb{N}}$, los sucesores inmediatos serán aquellos conjuntos abiertos W_α tales que $\overline{W_\alpha} \subseteq V_s$ y diámetro $\mathrm{diam}(W_\alpha) \leq \mathrm{diam}(V_s)/2$ (algunos de estos abiertos pueden aparecer repetidos para rellenar todos los nodos $s\hat{\ }\beta$). Observemos que para cada $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$, la rama $\{V_{\sigma|_k} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ tiene como intersección un conjunto unipuntual (completitud) cuyo único elemento vamos a denotar por p_σ. Por supuesto diferentes ramas podrían determinar el mismo punto y es también claro que todo elemento de X puede ser obtenido tomando la intersección de alguna de estas ramas. Cada abierto V_s (nodo del árbol) se puede describir como

$$V_s = \{p_\sigma : \sigma \succcurlyeq s\}.$$

Supongamos que $F : \mathscr{I} \to \mathrm{NWD}(X)$ es una función monótona que toma valores cerrados. Vamos a definir una nueva función $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathscr{I})$ como

$$f(s) = \{A \in \mathscr{I} : F(A) \cap V_s = \emptyset\}.$$

Se trata de una función monótona que verifica la condición (a) por ser F monótona. Para ver la condición (b), fijado $s \in D^{<\mathbb{N}}$ y dado $A \in \mathscr{I}$ sabemos que $F(A)$ no contiene al conjunto abierto V_s porque es denso en ninguna parte, luego existe $p \in V_s \setminus F(A)$. Tomemos ahora un conjunto abierto W_α tal que $\mathrm{diam}(\overline{W_\alpha}) \leq \mathrm{diam}(V(s))/2$ y $p \in W_\alpha \subseteq \overline{W_\alpha} \subseteq V_s \setminus F(A)$. Sabemos que este W_α debe coincidir con algún elemento $V_{s\hat{}\beta}$, luego $A \in f(s\hat{}\beta)$. Finalmente, para ver la condición (c) notemos que la inclusión $f(s) \subseteq \bigcap_{\alpha \in D} f(s\hat{}\alpha)$ es clara por monotonía, luego basta ver que es de hecho una igualdad. Si $s \in D^{<\mathbb{N}}$ y $A \notin f(s)$ entonces $V_s \cap F(A) \neq \emptyset$, de modo que existe un elemento p_σ ($\sigma \succcurlyeq s$) que pertenece a dicha intersección. Como consecuencia, si ponemos que s sea una sucesión de longitud k entonces $V_{\sigma|_{k+1}} = V_{s\hat{}\sigma(k+1)}$ también tiene intersección no vacía con $F(A)$, con lo cual $A \notin f(s\hat{}\sigma(k+1))$.

Por hipótesis, el árbol f contiene una rama que corresponderá a un cierto elemento $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ tal que la unión de sus nodos coincide con $\mathscr{I}$. Por tanto, $p_\sigma \notin \bigcup_{A \in \mathscr{I}} F(A)$, ya que cada A pertenece a $f(\sigma|_k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, lo que implica que $F(A) \cap U_{\sigma|_k} = \emptyset$ mientras que $p_\sigma \in U_{\sigma|_k}$. $\square$

Lo interesante del teorema anterior es que las condiciones (3) y (4) son propiedades intrínsecas al propio ideal $\mathscr{I}$ que no dependen de ningún espacio métrico completo. La condición (3) no impone demasiadas condiciones sobre f, de manera que puede ser útil para ver que un cierto ideal $\mathscr{I}$ es $D^{\mathbb{N}}$-Baire, mientras que la propiedad (4) es más restrictiva en sus condiciones luego puede ser más útil para comprobar que $\mathscr{I}$ no lo es.

Las afirmaciones (2) y (3) del teorema A.2.4 se pueden simplificar en el caso de espacios métricos separables completos ya que en este caso basta ver qué ocurre con el espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$, tal y como mostramos en el siguiente corolario.

Corolario A.2.5. *Para un ideal $\mathscr{I}$ sobre $\mathbb{N}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\mathscr{I}$ es X-Baire para cada espacio métrico completo separable.
(2) $\mathscr{I}$ es X-Baire para cada espacio métrico compacto.
(3) $\mathscr{I}$ es $2^{\mathbb{N}}$-Baire.
(4) Si $f : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathscr{I})$ es una función monótona tal que para cada $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ tiene las siguientes propiedades:
   - a) *$f(s)$ es heredirario.*
   - b) *$\bigcup_{t \succcurlyeq s} f(t) = \mathscr{I}$.*

   Entonces existe $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(\sigma|_k) = \mathscr{I}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) son implicaciones obvias.

(3) $\Rightarrow$ (4): Es enteramente análoga a (2) $\Rightarrow$ (3) del teorema A.2.4.

(4) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que la condición (1) es falsa. Por el teorema A.2.4 existe una función monótona $f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathscr{I})$ tal que $f(s)$ es hereditario y $\bigcup_{t \succcurlyeq s} f(t) = \mathscr{I}$ para cada s, pero la

unión de los nodos de cualquier rama está estrictamente contenida en $\mathscr{I}$. Vamos a construir una aplicación suprayectiva y monótona $h : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de manera que $g = f \circ h$ contradice (4).

Si $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ entonces s puede verse como una sucesión finita (quizás vacía) de bloques de ceros separadas entre ellas por un 1. En este sentido, podemos asociar a cada $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ un único elemento $h(s) = d \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: si $s = (00...0)$ entonces le asociamos $d = \emptyset$. En otro caso, s se puede escribir como $s = (0^{k_1}10^{k_2}1...0^{k_n}10^{k_{n+1}})$ y le asociamos el elemento $d = (k_1+1,...,k_n+1)$ (sólo contamos los bloques de ceros consecutivos que van seguidos de un uno). Por ejemplo, para (01) tendríamos (2), para (001100010) sería $(3,1,4)$, y a (000) le asociamos $\emptyset$. Es claro que se trata de una aplicación suprayectiva y monótona.

El árbol g satisface las mismas condiciones que f: es claro que es monótona, satisface (i) porque los nodos son todos nodos de f; verifica (ii) ya que al fijar un nodo cualquiera $g(s)$ del árbol g se tiene que entre los nodos que quedan por encima $\{g(t) : t \succcurlyeq s\}$ están contenidos todos los nodos de $\{f(r) : r \succcurlyeq h(s)\}$ cuya unión es todo el ideal $\mathscr{I}$ por hipótesis; y la última propiedad es una consecuencia del hecho de que los nodos que están en una rama de g están también en una rama de f, cuya unión no es todo el ideal $\mathscr{I}$ por hipótesis. Ésto contradice (4).

□

En [9, Definition 4.2] los autores introducen el concepto de *category respecting filter*. Señalar que un filtro es de este tipo si y sólo si el ideal dual $\mathscr{I}$ es K-Baire para cada espacio métrico compacto K. Entre las propiedades de este tipo de filtros estudiadas en dicho artículo está en que se trata de filtros que tienen la propiedad de Schur: toda sucesión de elementos de ℓ^1 que sea $\mathscr{F}$-convergente hacia 0 en la topología débil es también $\mathscr{F}$-convergente en norma hacia 0.

Hasta ahora hemos visto que para estudiar si un ideal $\mathscr{I}$ es X-Baire para cada espacio métrico completo con peso $w(X) \leq \kappa$ podemos limitar nuestro estudio al espacio $D^{\mathbb{N}}$, donde D es un espacio discreto con cardinalidad κ. Nuestro siguiente paso es mostrar que podemos dar una cota superior al cardinal κ. Para ser más específicos vamos a probar que basta estudiar espacios X con peso menor o igual que el cardinal del continuo $\mathfrak{c}$. Primero necesitamos una proposición.

Proposición A.2.6. *Supongamos que X es un espacio métrico completo con $|X| > \mathfrak{c}$ y $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{c}}$ es una familia de elementos de* $\mathrm{NWD}(X)$. *Entonces existe un subconjunto cerrado $\Omega \subseteq X$ con cardinalidad $|\Omega| = \mathfrak{c}$ y tal que para cada $\alpha \in \mathfrak{c}$ el conjunto $D_\alpha \cap \Omega$ es no vacío y pertenece a* $\mathrm{NWD}(\Omega)$.

Demostración. Por inducción vamos a construir una familia de conjuntos $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades para todo n:

(i) Ω_n tiene cardinal menor o igual que $\mathfrak{c}$.
(ii) $\Omega_{n+1} \supseteq \Omega_n$.
(iii) Para cada $\alpha \in \mathfrak{c}$ y todo $p \in \Omega_n \cap D_\alpha$ existe $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega_{n+1} \setminus D_\alpha$ tal que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge hacia p.

Para $n = 1$ tomamos como Ω_1 cualquier subconjunto de cardinalidad igual a $\mathfrak{c}$ de X que interseca a todos los D_α $(\alpha \in \mathfrak{c})$. Ahora supongamos que ya hemos definido Ω_n y queremos construir el siguiente. Para cada $\alpha \in \mathfrak{c}$ y todo $p \in \Omega_n \cap D_\alpha$ existe $(y_k^{p,\alpha})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus D_\alpha$ que converge hacia p

si k tiende a infinito. Definimos entonces

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n \cup \{y_k^{p,\alpha} : p \in D_\alpha \cap \Omega_n, \alpha \in \mathfrak{c}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que $|\Omega_{n+1}| \leq \mathfrak{c}$ ya que $|\Omega_n| \leq \mathfrak{c}$ y para cualesquiera $p \in \Omega_n$ y $\alpha \in \mathfrak{c}$ estamos añadiendo como mucho una cantidad numerable de elementos. El hecho de que la familia así construida verifica las propiedades (ii) y (iii) es clara por construcción.

Ahora consideremos $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$, que también verifica $|\Omega| \leq \mathfrak{c}$. Además su clausura en X, $\overline{\Omega}$ también satisface $|\Omega| \leq \mathfrak{c}$. Ne efecto, al estar trabajando en un espacio métrico todo punto en la clausura de un subconjunto es límite de una sucesión en tal subconjunto. No obstante, el número de sucesiones distintas que se pueden formar está acotado por $\mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. De este modo, para ver que $\overline{\Omega}$ es el conjunto cerrado que estamos buscando sólo tenemos que comprobar que cada $D_\alpha \cap \overline{\Omega}$ es raro en $\overline{\Omega}$. Supongamos que existe $\alpha \in \mathfrak{c}$ y un conjunto abierto U sobre X tal que

$$\emptyset \neq U \cap \overline{\Omega} \subseteq D_\alpha \cap \overline{\Omega}.$$

Por tanto

$$\emptyset \neq U \cap \Omega \subseteq D_\alpha \cap \Omega.$$

Si tomamos $p \in U \cap \Omega$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \in U \cap \Omega_{n_0}$. Usando (iii) podemos encontrar $y \in U \cap \Omega_{n_0+1} \setminus D_\alpha$, lo que es una contradicción. □

Concluimos ya el siguiente resultado.

Corolario A.2.7. *Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$. Si $\mathscr{I}$ es X-Baire para todo espacio métrico completo X con cardinalidad menor o igual que $\mathfrak{c}$ entonces es X-Baire para cualquier espacio métrico completo X.*

En particular, si $\mathscr{I}$ es $D^{\mathbb{N}}$-Baire donde D es un conjunto discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ entonces es X-Baire para cada espacio métrico completo X.

Demostración. Supongamos que $\mathscr{I}$ es X-Baire para cada espacio métrico completo X con cardinalidad igual o menor que $\mathfrak{c}$. Si Y es un espacio métrico completo con cardinalidad mayor que $\mathfrak{c}$ y $F : \mathscr{I} \to \mathrm{NWD}(Y)$ es una función monótona, el teorema anterior nos permite obtener un subespacio métrico completo Ω de Y tal que la función $G : \mathscr{I} \to \mathrm{NWD}(\Omega)$ definida para cada $A \in \mathscr{I}$ como $G(A) = F(A) \cap \Omega$ está bien definida y es claramente monótona. Como

$$\Omega \supsetneq \bigcup_{A \in \mathscr{I}} G(A) = \left(\bigcup_{A \in \mathscr{I}} F(A) \right) \cap \Omega,$$

deducimos que $\bigcup_{A \in \mathscr{I}} F(A) \neq Y$.

La última afirmación del enunciado es una consecuencia inmediata de la primera y el teorema A.2.4. □

Finalizamos la sección volviendo a la cuestión planteada al comienzo de la misma sobre si existen ideales X-Baire para cada espacio métrico completo aparte de los numerablemente generados. La respuesta es afirmativa si recurrimos a resultados de teoría de conjuntos relacionados con el axioma de Martin.

Corolario A.2.8. *Asumiendo el axioma de Martin $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ se tiene que todo ideal $\mathscr{I}$ con una base de cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$ es X-Baire para cualquier espacio polaco X.*

Demostración. Basta usar una versión del teorema de la categoría de Baire para espacios métricos separables (o espacios polacos) X: la unión de $\mathfrak{p}$ conjuntos de primera categoría en X es un conjunto de primera categoría (ver [35, 22C corollary]). $\square$

A.3. Ejemplos

En esta sección mostraremos que para una amplia clase de ideales, como los ideales analíticos o los P-ideales, la propiedad de ser X-Baire para todo espacio métrico completo X es equivalente a que dicho ideal sea numerablemente generado.

A.3.1. P-ideales generalizados

Por definición, un ideal $\mathscr{I}$ se dice que es un P-ideal si satisface que para cada subfamilia contable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{I}$ existe un elemento $A \in \mathscr{I}$ tal que $A_n \setminus B$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$, i.e., $A_n \setminus A \in Fin$. Además, si $\mathscr{I}$ no es contablemente generado entonces para cada $A \in \mathscr{I}$ existe $B \in \mathscr{I}$ tal que $B \setminus A$ es infinito (i.e. $B \setminus A \notin Fin$). Ésto motiva la siguiente definición que generaliza a los P-ideales no numerablemente generados.

Definición A.3.1. *Sean $\mathscr{I}, \mathscr{I}_0$ ideales sobre $\mathbb{N}$. Decimos que $\mathscr{I}$* es un P-ideal con respecto a $\mathscr{I}_0$, *de manera abreviada escribimos (P,$\mathscr{I}_0$)-ideal, si satisface las siguientes condiciones:*

(I) Para cada sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{I}$ existe $A \in \mathscr{I}$ tal que $A_n \setminus A \in \mathscr{I}_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
(II) Para cada $A \in \mathscr{I}$ existe $B \in \mathscr{I}$ tal que $B \setminus A \notin \mathscr{I}_0$.

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede construir (P, $\mathscr{I}_0$)-ideales que no son (P,Fin)-ideales.

Ejemplo A.3.2. *Supongamos que $\mathscr{I} \supsetneq Fin$ es un P-ideal no contablemente generado y $\mathscr{J} \supseteq Fin$ es otro ideal arbitrario. La suma directa de ambos ideales $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ se define (ver [34, p. 8]) como la familia de todos los subconjuntos $A \subseteq \mathbb{N}\times\{0,1\}$ (donde identificamos $\mathbb{N}\times\{0,1\}$ con $\mathbb{N}$) tal que*

$$A^0 = \{n \in \mathbb{N} : (n,0) \in A\} \in \mathscr{I} \text{ and } A^1 = \{n \in \mathbb{N} : (n,1) \in A\} \in \mathscr{J}.$$

Escribimos también $\mathscr{I}' := \mathscr{I} \oplus Fin$, $\mathscr{J}' := Fin \oplus \mathscr{J}$.

Afirmamos que $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ es un (P,$\mathscr{J}'$)-ideal. Para ver (I), si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ sabemos que existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $A_n^0 \setminus I$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$ por ser $\mathscr{I}$ un P-ideal. De este modo

$$A_n \setminus (I \times \{0\}) \subseteq ((A_n^0 \setminus I) \times \{0\}) \cup (A_n^1 \times \{1\}) \in \mathscr{J}'.$$

Por otro lado, dado $A \in \mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ tomamos $I \in \mathscr{I}$ satisfaciendo que $I \setminus A^0$ es infinito, de manera que se verifica $(I \times \{0\}) \setminus A \notin \mathscr{J}'$.

Observar ahora que si $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ es un (P, Fin)-ideal entonces $\mathscr{J}$ es un P-ideal, ya que dada una familia $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{J}$ existe $A \in \mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ tal que $(J_n \times \{1\}) \setminus A$ es finito (y por tanto $J_n \setminus A^1$ es finito también) para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si hubiéramos tomado el ideal $\mathscr{J}$ que no fuera P-ideal entonces tendríamos que $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ es un (P, $\mathscr{J}'$)-ideal que no es (P,Fin)-ideal.

Consideremos $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de Banach de las sucesiones acotadas de números reales. Podemos definir el límite de una sucesión a través de un ideal $\mathscr{I}$ sobre $\mathbb{N}$ en función del límite de la sucesión a través del filtro dual. Así pues, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathscr{I}$-convergente hacia x si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ pertenece a $\mathscr{I}$.

De este modo, para cualquier ideal $\mathscr{I}_0$ sobre $\mathbb{N}$ el conjunto

$$c_0(\mathscr{I}_0) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty : \lim_{n,\mathscr{I}_0} x_n = 0\}$$

es un subespacio cerrado de ℓ_∞. En efecto, si $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no pertenece a dicho conjunto entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \varepsilon\}$ no pertenece a $\mathscr{I}$. Se comprueba entonces que $B(\mathbf{x}, \varepsilon/2)$ tiene intersección vacía con $c_0(\mathscr{I}_0)$, pues si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ perteneciese a dicha intersección tendríamos que $|y_n| \geq |x_n| - |y_n - x_n| \geq |x_n| - \varepsilon/2$ y

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \varepsilon\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : |y_n| \geq \varepsilon/2\} \in \mathscr{I}_0,$$

lo que es una contradicción.

La norma standard del espacio de Banach cociente $\ell_\infty/c_0(\mathscr{I}_0)$ se puede describir como sigue: $\|[\mathbf{x}]\| \leq \delta$ si y sólo si para cada $\eta > \delta$ tenemos que $\{n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \eta\} \in \mathscr{I}_0$. En efecto, si $\|[\mathbf{x}]\| \leq \delta$ entonces existe $\mathbf{y} \in c_0(\mathscr{I}_0)$ tal que $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty < \eta$. Como $\{n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \eta\}$ está contenido en el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |y_n| > \eta - \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\} \in \mathscr{I}_0$ entonces se deduce que también debe pertenecer a $\mathscr{I}_0$. Recíprocamente, si $\delta > \eta$ verifica $\{n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \eta\} \in \mathscr{I}_0$ entonces podemos definir $\mathbf{y}$ como $y_n = -x_n$ si $|x_n| \geq \eta$ o $y_n = 0$ en caso contrario. El elemento $\mathbf{y} \in c_0(\mathscr{I}_0)$ y además $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| < \eta$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales escribiremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $x_n \leq y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposición A.3.3. *Si $\mathscr{I}, \mathscr{I}_0$ son ideales sobre $\mathbb{N}$ tales que $\mathscr{I}$ es un (P,$\mathscr{I}_0$)-ideal, entonces $\mathscr{I}$ no es X-Baire para un cierto espacio métrico completo X.*

Demostración. El espacio que estamos buscando será construido como un subespacio de $E = \ell_\infty/c_0(\mathscr{I}_0)$. Para cada $A \in \mathscr{I}$ consideramos el siguiente subconjunto de E

$$F_A := \{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : 0 \leq (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq \chi_A\}.$$

La familia $\{F_A : A \in \mathscr{I}\}$ tiene las siguientes propiedades:

1. Cada F_A es un conjunto cerrado. Basta ver que el conjunto $H = \{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : 0 \leq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ es un cerrado, pues F_A se puede escribir como intersección de este conjunto y un trasladado de éste. Si tomamos una sucesión $([(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}])_{k\in\mathbb{N}}$ en dicho conjunto H que sea convergente a un cierto $[(z_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ vamos a probar que la sucesión $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $z'_n = 0$ si $z_n \geq 0$ y $z'_n = z_n$ si

$z_n < 0$ pertenece a $c_0(\mathscr{I}_0)$, en cuyo caso tendremos que $[(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(z_n)_{n\in\mathbb{N}} - (z'_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in H$ pues $z_n - z'_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Dado $\delta > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|[(x^k_n)_{n\in\mathbb{N}}] - [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}]\| < \delta$, luego el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : |x^k_n - z_n| \geq \delta\} \in \mathscr{I}_0$$

por la observación hecha antes de esta proposición. Como $x^k_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tendremos que si $|z'_n| \geq \delta$ entonces $z_n = z'_n < 0$ de modo que

$$|x^k_n - z_n| = x^k_n - z_n \geq x^k_n + \delta \geq \delta,$$

luego

$$\{n \in \mathbb{N} : |z'_n| \geq \delta\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : |x^k_n - z_n| \geq \delta\} \in \mathscr{I}_0.$$

2. Si $A, B \in \mathscr{I}$ entonces $A \setminus B \in \mathscr{I}_0$ si y sólo si $F_A \subseteq F_B$. De hecho, supongamos que $A \setminus B \in \mathscr{I}_0$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que verifica $0 \leq (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq \chi_A$. La sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $y_n = 0$ si $n \notin A \setminus B$, $y_n = -x_n$ si $n \in A \setminus B$ pertenece a $c_0(\mathscr{I}_0)$. Por tanto

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in F_B.$$

Por otro lado, si $A \setminus B \notin \mathscr{I}_0$ y $F_A \subseteq F_B$ entonces $[\chi_A] \in F_B$, luego existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathscr{I}_0)$ tal que

$$0 \leq \chi_A + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq \chi_B.$$

En ese caso, para cada $n \in A \setminus B$ se verifica $y_n = -1$, luego

$$\{n \in \mathbb{N} : |y_n| \geq 1/2\} \supseteq A \setminus B \notin \mathscr{I}_0.$$

Ésto contradice el hecho de que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathscr{I}_0)$.
3. Si $A \subseteq B$ entonces $F_A \subseteq F_B$. Es consecuencia del punto anterior.
4. Para cualesquiera $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{I}$ existe $A \in \mathscr{I}$ tal que $\bigcup_n F_{A_n} \subseteq F_A$: Ésto se sigue de la condición (I) de la definición A.3.1 y la propiedad 2. anterior.
5. Para cada $A \in \mathscr{I}$ existe $B \in \mathscr{I}$ tal que $F_A \subseteq F_B$ y F_A es un subconjunto de F_B denso en ninguna parte. De hecho, si $A \in \mathscr{I}$ podemos usar la condición (II) de la definición A.3.1 para deducir la existencia de un $B \in \mathscr{I}$ tal que $B \setminus A \notin \mathscr{I}_0$. Podemos suponer que $B \supseteq A$ (en otro caso tomamos $B' = A \cup B$ en lugar de B), luego por 2. tenemos que $F_A \subsetneq F_B$. Veamos que F_A tiene interior vacío en F_B. Si $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface $0 \leq \mathbf{x} \leq \chi_A$, entonces para cada $1 > \delta > 0$ la sucesión $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \delta\chi_{B\setminus A}$ verifica que

$$\|[\mathbf{x}] - [\mathbf{y}]\| = \|[\mathbf{x} - \mathbf{y}]\| \leq \delta.$$

Sin embargo $[\mathbf{y}] \notin F_A$, ya que $[\mathbf{y}] \in F_A$ implica que existe $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathscr{I}_0)$ tal que

$$0 \leq \mathbf{z} + \mathbf{y} \leq \chi_A.$$

En ese caso, para cada $n \in B \setminus A$ tenemos que $z_n = -\delta$, luego

$$\{n \in \mathbb{N} : |z_n| \geq \delta/2\} \supseteq B \setminus A \notin \mathscr{I}_0.$$

Ésto contradice $(z_n)_n \in c_0(\mathscr{I}_0)$. Por otro lado, $\mathbf{y}$ pertenece a $F(B)$ porque $0 \leq \mathbf{y} \leq \chi_B$ al ser $\delta < 1$.

Como resultado tenemos que

$$X := \bigcup_{A \in \mathscr{I}} F_A$$

es un subconjunto cerrado de E (por 4.), luego es un subespacio métrico completo (con la métrica inducida), y F_A es denso en ninguna parte en X para cada $A \in \mathscr{I}$ (por 5.). $\square$

Es natural preguntarse si todo ideal no numerablemente generado sobre $\mathbb{N}$ es un P-ideal con respecto a algún ideal $\mathscr{I}_0$. La respuesta es negativa, tal y como ponemos de manifiesto a continuación.

Proposición A.3.4. *Sea $\mathscr{A}$ una familia infinita de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son infinitos y casi disjuntos (existen familias de este tipo por el lema 2.5.4). Sea $\mathscr{I}$ el ideal generado por $\mathscr{A}$, i.e.*

$$\mathscr{I} = \{I \subseteq \mathbb{N} : \textit{ existen } A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \textit{ tales que } I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i\}.$$

Entonces $\mathscr{I}$ no es un P-ideal con respecto a ningún $\mathscr{I}_0$.

Demostración. Supongamos que $\mathscr{I}$ es un P-ideal con respecto a $\mathscr{I}_0$. Fijado $A \in \mathscr{A}$ podemos tomar una familia numerable $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ de conjuntos distintos entre sí y también diferentes de A. La familia de conjuntos dada por $A_0 = A$ y $A_{n+1} = A_n \cup B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ verifica

$$A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \ldots$$

La hipótesis implica que existe un conjunto $C = C_1 \cup \ldots \cup C_k$ (con $C_i \in \mathscr{A}$ para cada $i = 1, \ldots, n$) tal que $A_n \setminus C \in \mathscr{I}_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando A_{n_0} diferente de los elementos C_i deducimos que

$$A_{n_0} \setminus C = A_{n_0} \setminus ((A_{n_0} \cap C_1) \cup \ldots \cup (A_{n_0} \cap C_k)) \in \mathscr{I}_0,$$

y por tanto $A_{n_0} \in \mathscr{I}_0$, ya que cada $A_{n_0} \cap C_i$ es finito. Como $A \subseteq A_{n_0}$, el conjunto A también pertenece a $\mathscr{I}_0$. Ya que $A \in \mathscr{A}$ era arbitrario se tiene que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{I}_0$, y por tanto, $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{I}_0$. Pero ésto contradice (II) de la definición A.3.1. $\square$

Los ideales de la proposición anterior no son $2^{\mathbb{N}}$-Baire cuando la familia $\mathscr{A}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ y sus elementos son conjuntos infinitos. Ésto es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición A.3.5. *Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$. Supongamos que existe una familia $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{I}$ de conjuntos infinitos casi disjuntos con $|\mathscr{C}| = \mathfrak{c}$ y tal que todo $I \in \mathscr{I}$ satisface*

$$|\{C \in \mathscr{C} : C \subseteq I\}| < +\infty.$$

Entonces $\mathscr{I}$ no es $2^{\mathbb{N}}$-Baire.

Demostración. Usaremos el corolario A.2.5. Como $\mathscr{C}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$, podemos escribir $\mathscr{C} = \{C_\sigma : \sigma \in 2^{\mathbb{N}}\}$ y definir una función $f : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathscr{I})$ donde $f(s)$ es la familia de todos los conjuntos $I \in \mathscr{I}$ que no contienen ninguno de los elementos de $\{C_\sigma : \sigma \succcurlyeq s\}$:

$$f(s) = \left\{I \in \mathscr{I} : \text{ si } \sigma \in 2^{\mathbb{N}} \text{ verifica } \sigma \succcurlyeq s \text{ entonces } I \not\supseteq C_\sigma\right\}$$

Claramente cada $f(s)$ es cerrado bajo subconjuntos. Fijado $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ y un arbitrario $I \in \mathscr{I}$ sabemos que existe solamente un conjunto finito de elementos C_{σ_k} $(k = 1,\ldots,m)$ contenido en $\mathscr{I}$. Tomemos $t \succcurlyeq s$ con $\sigma_i \not\succcurlyeq t$ para todo $i = 1,\ldots,m$. Para cada $\sigma \succcurlyeq t$ será σ distinto de todos los σ_k de manera que $C_\sigma \nsubseteq I$, es decir, $I \in f(t)$. Ésto muestra que

$$\bigcup_{t \succcurlyeq s} f(t) = \mathscr{I}$$

para todo $s \in 2^{<\mathbb{N}}$.

Además f es monótona ya que $t \succcurlyeq s$ implica $\{C_\sigma : \sigma \succcurlyeq t\} \subseteq \{C_\sigma : \sigma \succcurlyeq s\}$ y por tanto $f(t) \supseteq f(s)$. Finalmente, si tomamos una rama $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ entonces $C_\sigma \notin f(\sigma|_k)$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

A.3.2. P-ideales *tall*

Damos ahora una extensión de la proposición A.3.3 a otros casos. Primero extendemos la definición de *ortogonal de un ideal* dado (ver [34, p. 10]).

Definición A.3.6. *Dados dos ideales $\mathscr{I}$ e $\mathscr{I}_0$ sobre $\mathbb{N}$ definimos el* ideal ortogonal de $\mathscr{I}$ respecto *de $\mathscr{I}_0$ como*

$$\mathscr{I}^{\perp \mathscr{I}_0} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \cap B \in \mathscr{I}_0 \text{ para todo } B \in \mathscr{I}\}.$$

Diremos también que $\mathscr{I}_1$ es tall con respecto a $\mathscr{I}_0$, *o simplemente* $\mathscr{I}_0$-tall, *si* $\mathscr{I}_1^{\perp \mathscr{I}_0} \subseteq \mathscr{I}_1$, *o equivalentemente, para cada $A \notin \mathscr{I}_1$ existe $B \in \mathscr{I}_1 \setminus \mathscr{I}_0$ tal que $B \subseteq A$.*

El concepto de ideal $\mathscr{I}_0$-*tall* generaliza el de *ideal* tall (ver [34, p. 11]) que corresponde con la definición anterior a un *Fin-tall*.

Observar que la condición de ser $\mathscr{I}_0$-*tall* es más fuerte que la propiedad (II) de la definición de (P, $\mathscr{I}_0$)-ideal, ya que $A \in \mathscr{I}_1$ implica que $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathscr{I}_1$ luego existe $B \in \mathscr{I}_1 \setminus \mathscr{I}_0$ con $B \subseteq \mathbb{N} \setminus A$. El elemento $B \in \mathscr{I}_1$ verifica entonces que $B \setminus A \notin \mathscr{I}_0$.

Proposición A.3.7. *Supongamos que $\mathscr{I}_1$ es (P,$\mathscr{I}_0$)-ideal e $\mathscr{I}_0$-*tall. *Entonces todo ideal $\mathscr{I}_2$ conteniendo a $\mathscr{I}_1$ no es X-Baire para un espacio métrico completo X.*

Demostración. Consideremos la función $f_1 : \mathscr{I}_1 \to \mathscr{P}(\ell_\infty / c_0(\mathscr{I}_0))$ definida como

$$f_1(B) = F_B = \{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : 0 \leq (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq \chi_B\}$$

de la prueba de la proposición A.3.3.

Ahora definimos $f_2 : \mathscr{I}_2 \to \mathscr{P}(E)$ ($E = \ell_\infty/c_0(\mathscr{I}_0)$) por

$$\begin{aligned} f_2(A) &= \bigcup_{B\in\mathscr{I}_1, B\subseteq A} f_1(B) \\ &= \{[\mathbf{x}] = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \ell_\infty/c_0(\mathscr{I}_0) : \text{ existe } B \in \mathscr{I}_1 \text{ tal que } B \subseteq A \text{ y } 0 \le \mathbf{x} \le \chi_B\}. \end{aligned}$$

Vamos a ver que las hipótesis sobre $\mathscr{I}_1$ implican que $f_2(A)$ es cerrado en E siempre. Fijado $A \in \mathscr{I}_1$ tenemos dos posibilidades: si A pertenece a $\mathscr{I}_1$ entonces $f_2(A) = f_1(A)$, que sabemos es cerrado. En otro caso, para cada $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{I}_1$ con $B_n \subseteq A$ existe $B \in \mathscr{I}_1$ tal que $B_n \setminus B \in \mathscr{I}_0$, luego $C := A \cap B$ también verifica $B_n \setminus C \in \mathscr{I}_0$, y usando 2. de la prueba de la proposición A.3.3 deducimos que $\bigcup_n f_1(B_n) \subseteq f_1(C) \subseteq f_2(A)$. Ésto muestra que cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $f_2(A)$ está contenida en $f_1(C)$ que es cerrado. Así pues, $f_2(A)$ es un conjunto cerrado.

La monotonía de f_2 es clara, y también verifica

$$X = \bigcup_{A\in\mathscr{I}_2} f_2(A) = \bigcup_{B\in\mathscr{I}_1} f_1(B),$$

que es un espacio métrico completo como vimos en la proposición antes citada.

Finalmente veremos que cada $f_2(A)$ es un conjunto raro en X. Si A es un elemento de $\mathscr{I}_2$, como $\mathbb{N}\setminus A \notin \mathscr{I}_1$, la hipótesis de ser $\mathscr{I}_0$-*tall* implica que existe $C \subseteq \mathbb{N}\setminus A$ tal que $C \in \mathscr{I}_1 \setminus \mathscr{I}_0$. Razonando como en la prueba de la proposición A.3.3 obtenemos que $f_2(A)$ es raro en $f_2(A \cup C)$. □

Corolario A.3.8. *Si $\mathscr{I}$ es un P-ideal* tall *entonces para todo ideal $\mathscr{J} \supseteq \mathscr{I}$ existe un espacio métrico completo X tal que $\mathscr{J}$ no es X-Baire.*

Demostración. Si $\mathscr{I}$ es tall entonces no es numerablemente generado, de manera que $\mathscr{I}$ es *Fin-tall* y un (P, Fin)-ideal, con lo que basta usar la proposición anterior. □

Damos a continuación dos conocidos ejemplos de P-ideales tall que han sido ampliamente estudiados en [34]:

- *Ideales densos sumables*: si $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ satisface $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \infty$ y $\lim_n f(n) = \infty$ entonces escribimos
$$\mathscr{I}_f = \{A \in 2^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in A} f(n) < +\infty\}.$$
- *Ideales de Erdös-Ulam*: if $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ es una función tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = +\infty$ y $\lim_m \frac{f(m)}{\sum_{n=1}^m f(n)} = 0$ entonces escribimos
$$\mathscr{I} = \left\{A \in 2^{\mathbb{N}} : \lim_n \frac{\sum_{k\in\{1,\dots,n\}\cap A} f(k)}{\sum_{k\in\{1,\dots,n\}} f(k)} = 0\right\}.$$
Como caso particular tenemos el ideal de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ formado por los conjuntos de densidad cero.

El corolario A.3.8 implica que para todo ideal $\mathscr{I}$ que contiene un ideal sumable o un ideal de Erdös-Ulam existe un espacio métrico completo tal que $\mathscr{I}$ no es X-Baire.

A.3.3. Ideales analíticos

Los ideales analíticos son los más estudiados (ver [34], [70]). Un subconjunto A de un espacio polaco X se dice que es *analítico* si existe una aplicación continua $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ con $\mathrm{Im}(f) = A$. En particular, todos los conjuntos de Borel son analíticos (esta afirmación así como otras caracterizaciones de los conjuntos analíticos aparecen en [48]). Un ideal $\mathscr{I}$ es analítico si es un subconjunto analítico del espacio métrico compacto (polaco) $2^{\mathbb{N}}$.

Proposición A.3.9. *Si $\mathscr{I}$ es un ideal sobre $\mathbb{N}$ analítico y no numerablemente generado entonces existe un espacio polaco tal que $\mathscr{I}$ no es X-Baire.*

Demostración. Supongamos que existe una función continua $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ cuya imagen es un ideal $\mathscr{I}$. Como hicimos en las secciones anteriores consideramos el árbol $T = \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ con el orden $t \preccurlyeq s$ si s es una extensión de t, e identificamos los elementos $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ con la rama $\{\sigma|_k : k \in \mathbb{N}\}$. Para un elemento $t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ denotamos

$$T_t := \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : s \succcurlyeq t\}$$

$$[t]^T := \{g(\sigma) : \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ es una rama en } T, \sigma \succcurlyeq t\}.$$

En otras palabras T_t es el subárbol de todos los elementos por encima de t y $[t]^T$ es la familia de las imágenes a través de g de todos las ramas que pertenecen al árbol T_t. Vamos a podar aquellos subárboles T_t de T tales que $[t]^T$ está contenido en un subideal contablemente generado de $\mathscr{I}$. Notamos lo siguiente:

- El árbol entero $T = T_\emptyset$ no se borra ya que $[\emptyset]^T = \mathscr{I}$ no es contablemente generado.
- Si un nodo t ha sobrevivido después de la poda entonces todos los nodos que le preceden en T también han sobrevivido. Por otro lado, uno de sus inmediatos sucesores debe haber también sobrevivido ya que
$$[t]^T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [t\hat{}k]^T,$$
luego si todo sucesor de $t\hat{}k$ hubiera desaparecido entonces $[t]^T$ estaría contenido en un subideal numerablemente generado de $\mathscr{I}$.

Por tanto, después de la poda obtenemos un subárbol (no vacío) $T' \subseteq T$. Consideremos ahora el conjunto X formado por todas las ramas σ que han sobrevivido en T', i.e.,

$$X = \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sigma|_k \in T' \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}.$$

Podemos equipar a X con la topología del árbol T', i.e., los abiertos básicos son aquellos conjuntos de la forma $\{\sigma : \sigma \in X, \sigma \succcurlyeq t\}$ donde $t \in T'$. Notar que X es un subespacio cerrado de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, luego se trata de un espacio polaco.

La aplicación $F : \mathscr{I} \to \mathrm{NWD}(X)$ dada por $F(A) = \{\sigma \in X : g(\sigma) \subseteq A\}$ (notar que los $g(\sigma)$ son elementos de $2^{\mathbb{N}}$, conjunto que se identifica de manera natural con $\mathscr{P}(\mathbb{N})$) está bien definida. Primero notemos que $F(A)$ es cerrado en X, ya que si $\sigma \in X$ no pertenece a $F(A)$ entonces $g(\sigma)$ no está contenido en A, luego existe $k \in \mathbb{N}$ verificando que $g(\sigma) \cap \{1, \ldots, k\}$ no está contenido en

A. La continuidad de g existe $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ con $\sigma \succcurlyeq s$ y tal que para cada $\tau \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con $\tau \succcurlyeq s$ es $g(\tau) \cap \{1,\ldots,k\} = g(\sigma) \cap \{1,\ldots,k\}$. En particular, ésto implica que $g(\tau) \nsubseteq A$ y por tanto el conjunto abierto $\{\tau \in X : \tau \succcurlyeq s\} \subseteq X \setminus F(A)$ (s pertenece a T' porque es un nodo de σ). Por otro lado, si hay un abierto $\{\sigma \in X : \sigma \succcurlyeq t\}$ ($t \in T'$) contenido en $F(A)$ entonces

$$[t]^{T'} = \{g(\sigma) : \sigma \in X, \sigma \succcurlyeq t\}$$

está contenido en el subideal generado por A. Ésto significa que

$$[t]^T = [t]^{T'} \cup \bigcup_{s \in T \setminus T', s \succcurlyeq t} [s]^T$$

está contenido en un subideal contablemente generado de $\mathscr{I}$ (hay una cantidad contable de nodos $s \in T$ con $s \succcurlyeq t$), lo que es absurdo.

Finalmente, $\bigcup_{A \in \mathscr{I}} F(A) = X$ ya que dado $\sigma \in X$ se tiene que $\sigma \in F(g(\sigma))$.

□

A.4. Cubrimiento por subconjuntos compactos

En esta sección reemplazamos la familia de conjuntos densos en ninguna parte en un espacio métrico completo por la familia de todos los subconjuntos compactos

$$\mathscr{K}(X) = \{A \subseteq X : \ A \text{ es compacto } \}.$$

Presentamos a continuación un ejemplo de ideal que no puede cubrir $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con subconjuntos compactos, lo que muestra que para la familia $\mathscr{K}(X)$ parece haber más variedadde ideales que en el caso de $\mathrm{NWD}(X)$

El siguiente ideal está definido en [55, p. 178].

$$\mathscr{I}_p = \{A \in 2^{\mathbb{N}} : \text{existe } c > 0 \text{ tal que } |A \cap \{1,...,2^n\}| \leq n^c \text{ para todo } n \geq 2\}.$$

Tiene las siguientes propiedades.

- $\mathscr{I}$ no es contablemente generado.
- $\mathscr{I}$ es F_σ: La función $\varphi : 2^{\mathbb{N}} \to [0,\infty]$ definida como

  $$\varphi(A) = \text{ínf}\{c > 0 : |A \cap 2^n| \leq n^c \text{ para cada } n \geq 2.\},$$

  o $\varphi(A) = \infty$ si tal c no existe, verifica que es una medida inferiormente semicontinua tal que

  $$\mathscr{I}_p = \{A \in 2^{\mathbb{N}} : \varphi(A) < +\infty\}.$$

  Por tanto $\mathscr{I}_p$ es un F_σ-ideal ([57, lema 1.2]).
- No es P-ideal: Podemos construir una familia de conjuntos $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{I}$ tal que $\varphi(A_k) \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, si existe $B \in \mathscr{I}_p$ tal que $A_k \setminus B$ es finito entonces $\varphi(B) \geq k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, lo que es absurdo.

Dado un conjunto parcialmente ordenado $(S,\leq)$, decimos que un subconjunto $A\subseteq S$ es débilmente acotado si cada subconjunto infinito de A contiene un subconjunto infinito acotado. El siguiente lema puede encontrarse en [55, p. 178].

Lema A.4.1. *El ideal $\mathscr{I}_p$ es una unión contable de conjuntos débilmente acotados.*

Demostración. Definimos para cada $c>0$

$$I_p(c)=\{A\in 2^{\mathbb{N}}:|A\cap 2^n|\leq n^c\}.$$

Es claro que $\mathscr{I}_p=\bigcup_{m\geq 1}I_p(m)$, luego sólo tenemos que comprobar que cada $I_p(m)$ es débilmente acotado en $(\mathscr{I}_p,\subseteq)$. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión infinita de $I_p(c)$. Pasando a una subsucesión podemos asumir que cada A_n converge a un cierto $A\in 2^{\mathbb{N}}$ por la compacidad $2^{\mathbb{N}}$. Notar que $\lim_n A_n=A$ significa que para cada $k\in\mathbb{N}$ existe n_k tal que $n\geqslant n_k$ implica $A\cap\{1,...2^k\}=A_n\cap\{1,...,2^k\}$.

Pasando de nuevo a una subsucesión podemos suponer que $A\cap\{1,...,2^n\}=A_n\cap\{1,...,2^n\}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. El conjunto $B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ satisface

$$\left|\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\cap 2^k\right|\leq\left|\bigcup_{n<k}(A_n\cap 2^k)\right|+\left|\bigcup_{n\geq k}(A_n\cap 2^k)\right|\leq(n-1)n^c+n^c=n^{c+1}.$$

De este modo, una sucesión infinita en $I_p(c)$ contiene una subsucesión infinita cuya unión está en $I_p(c+1)$. □

Proposición A.4.2. *El ideal $\mathscr{I}_p$ no cubre $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con subconjuntos compactos. En otras palabras, para cada función monótona $F:(\mathscr{I}_p,\subseteq)\to(\mathscr{K}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}),\subseteq)$ tenemos*

$$\bigcup_{x\in\mathscr{I}_p}F(x)\neq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Demostración. Primero probaremos que cada subconjunto débilmente acotado $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{I}_p$ verifica que $\bigcup_{A\in\mathscr{A}}F(A)$ tiene clausura compacta.

Como $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es metrizable, un subconjunto $K\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es compacto si y sólo si es sucesionalmente compacto. Vamos a probar que toda sucesión en $\bigcup_{A\in\mathscr{A}}F(A)$ tiene una subsucesión convergente.

Supongamos que $a_n\in F(A_n)$ $(A_n\in\mathscr{A})$ es una sucesión arbitraria. Si $\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$ es finito, entonces existe una subsucesión $a_{n_k}\in F(A_{n_k})=F(A)$ (constante) para cada $k\in\mathbb{N}$, luego admite una subsucesión convergente ya que $F(A)$ es compacto. Si $\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$ es infinito, entonces existe una subfamilia infinita $\{A_n:n\in G\subseteq\mathbb{N}\}$ y acotada por un conjunto $B\in\mathscr{I}_p$. Ésto significa que $(a_n)_{n\in G}\subseteq F(B)$, de modo que $(a_n)_{n\in G}$ admite una subsucesión convergente que es también subsucesión convergente de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Combinando este resultado con el lema A.4.1 deducimos que si F cubre todo el espacio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ entonces este espacio es la unión de una cantidad numerable de compactos:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}=\bigcup_{x\in\mathscr{I}_p}F(x)\subseteq\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\overline{F[I_p(c)]}\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Ésto es imposible por el teorema de Baire. □

Apéndice B

Lifting y descomposición de medidas finitamente aditivas

Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de probabilidad. La diferencia simétrica $A\Delta B$ de dos elementos se define como $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Escribir $\mu(A\Delta B)=0$ significa que podemos "pasar" de A a B (o de B a A) añadiendo y quitando trozos de medida nula. En este sentido la relación $A\sim B$ si y sólo si $\mu(A\Delta B)=0$ define una relación de equivalencia en Σ. Si $\Sigma/\sim$ es el conjunto cociente, entonces podemos plantearnos tomar un elemento de cada clase de equivalencia (lo cual podemos hacerlo usando el axioma de elección). No obstante, dicha elección no tiene por qué ser "buena", en el sentido de que si A y B son los representantes elegidos para las clases $[A],[B]\in\Sigma/\sim$ entonces $A\cup B$ no tiene por qué ser el representante que hemos elegido de $[A\cup B]$. No parece claro que una función de elección que respete las operaciones usuales de conjuntos se pueda conseguir.

Un *lifting* es una función que nos da una buena elección de representantes para las clases de equivalencia de la relación anterior. Aunque estas funciones no existen siempre, sí está garantizada su existencia en espacios de probabilidad completos. En el presente capítulo recogemos una demostración [73] poco conocida de este último hecho. Se trata además de la única demostración verdaderamente elemental que conocemos, en el sentido de que no recurre a teoremas previos de teoría de la medida sino que simplemente hace uso de ultrafiltros.

En las secciones siguientes ofrecemos una serie de resultados muchas de cuyas pruebas son originales y con ideas nuevas como la inclusión de límites a través de filtros (idea que ya aparece en [18]), que han sido discutidas con el Prof. Bernardo Cascales. Nuestra motivación para esos resultados es la siguiente:

Cuando uno estudia la propiedad de Radon-Nikodým para espacios de Banach, la prueba de la afirmación: *si todo subconjunto acotado de E es dentable entonces E tiene la propiedad de Radon-Nikodým* (ver [13, theorem 2.2.3, p. 21-23]), muestra que la derivada de Radon-Nikodým de una medida vectorial, μ-continua y de variación acotada se puede aproximar en μ-casi todo punto y en $L^1(\mu,E)$ por una cierta sucesión de la forma

$$s_\pi=\sum_{A\in\pi}\frac{m(A)}{\mu(A)}\chi_A \qquad \left(\frac{0}{0}:=0\right) \tag{B.1}$$

donde π es una partición numerable de Ω en elementos de Σ. Hasta donde conocemos esta idea ha sido usada por los profesores Joseph Diestel (Kent State University) y Gabriel Vera (Universidad de Murcia) para dar una prueba del teorema de Radon-Nikodým para medidas escalares numerablemente aditivas μ-continuas sobre (Ω,Σ,μ).

En general, si consideramos particiones finitas π en Σ-conjuntos, entonces se puede garantizar [26, lemma 1, p. 67] que para cada función $f \in L^1(\mu)$, la red

$$\sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)}\chi_A \qquad \left(\frac{0}{0}:=0\right)$$

definida para el conjunto dirigido de dichas particiones es convergente a la función f en $L^1(\mu)$. En particular, si $\lambda : \Sigma \to [0,\infty)$ es una medida escalar μ-continua, numerablemente aditiva y finita entonces la red

$$s_\pi = \sum_{A\in\pi} \frac{\lambda(A)}{\mu(A)}\chi_A \qquad \left(\frac{0}{0}:=0\right)$$

converge hacia la derivada de Radon-Nikodým de λ con respecto a μ.

Es claro que no podemos esperar que haya convergencia en casi todo punto de la anterior red, ya que si los conjuntos unipuntuales pertenecen a Σ y son μ-nulos, entonces tendríamos que la red convergería puntualmente hacia cero siempre.

Sin embargo, en caso de que (Ω,Σ,μ) sea un espacio de probabilidad completo entonces vamos a tener garantizada la existencia de un *lifting* $\rho : \Sigma \to \Sigma$ sobre este espacio, lo que nos permite obtener una subálgebra $\rho[\Sigma]$ de Σ "densa" y tal que el único conjunto de medida nula es el vacío. Podemos entonces considerar ahora el conjunto dirigido $\mho$ formado por todas las particiones de Ω en $\rho[\Sigma]$-conjuntos ordenado por refinamiento. La ventaja ahora es que en la red $(s_\pi)_{\pi\in\mho}$ no tenemos que preocuparnos por los conjuntos μ-nulos.

Esta idea aparece en un artículo de Kupka [52, lemma 4.3, p. 202] y otro artículo reciente [18, lemma 3.7] en el caso vector-valuado para obtener toda función $f \in L^1(\mu,E)$ como límite en casi todo punto de una red

$$s_\pi = \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f\,d\mu)}{\mu(A)}\chi_A.$$

En este capítulo vamos a ver que dada una medida arbitraria μ-continua y finitamente aditiva (debilitamos la condición de ser numerablemente aditiva con respecto a los resultados previos) λ sobre (Ω,Σ), la red $(s_\pi)_{\pi\in\mho}$ definida como

$$s_\pi = \sum_{A\in\pi} \frac{\lambda(A)}{\mu(A)}\chi_A$$

converge puntualmente a una función f. Concretamente probamos un teorema de descomposición para medidas finitamente aditivas de probabilidad μ-continuas (no negativas) λ, el cual permite obtener en una sóla demostración: la descomposición de *Hewitt-Yoshida* [78] de λ en su parte numerablemente aditiva y puramente finitamente aditiva, el teorema de Radon-Nikodým y una caracterización de las medidas puramente finitamente aditivas μ-continuas (caracterización originalmente debida a Hewitt y Yoshida [78] aunque aquí la demostración es muy diferente).

Por otro lado, probaremos usando ultrafiltros que cuando consideramos la red $(s_\pi)_{\pi\in\mho}$ en $(L^1(\mu)^{**},\omega^*)$ a través de la identificación $L^1(\mu)\subseteq L^1(\mu)^{**}$, su límite también existe con respecto a la topología ω^*. ¿Cuál es dicho elemento y^{**}? Pues se trata del único elemento de $L^\infty(\mu)^* = L_1^{**}(\mu)$ que verifica $y^{**}(\chi_A) = \lambda(A)$ para cada $A \in \Sigma$, resultado que conecta con [78, theorem 2.3, p.53]. Estableceremos también algunas relaciones entre la función f y el elemento y^{**}, como el hecho de que la distancia de y^{**} a $L^1(\mu)$ se alcanza precisamente en la función f que se ha obtenido como límite puntual en μ-casi todo punto.

Las referencias básicas para este apéndice son: [73], [78], [26].

B.1. Existencia de *liftings* en espacios de probabilidad completos

A lo largo de esta sección (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finito ($\mu(\Omega) < \infty$) y completo (i.e. si $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$ entonces para cada $B \subseteq A$ tenemos que $B \in \Sigma$). Denotaremos por $\mathscr{N}$ a la familia de todos los conjuntos μ-nulos de Σ.

Definición B.1.1. *Sea $\mathscr{A} \subseteq \Sigma$ una subálgebra.*

1. *Una aplicación $d : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ se dice que es una* densidad *(inferior) sobre $\mathscr{A}$ si verifica las siguientes prpiedades para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$:*
   (i) $\mu(A \Delta d(A)) = 0$.
   (ii) Si $\mu(A \Delta B) = 0$ *entonces* $d(A) = d(B)$.
   (iii) $d(\emptyset) = \emptyset$, $d(\Omega) = \Omega$.
   (iv) $d(A \cap B) = d(A) \cap d(B)$.
2. *Diremos que $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ es un* lifting *si ρ es una densidad para $\mathscr{A}$ tal que*
   (v) $\rho(\Omega \setminus A) = \Omega \setminus \rho(A)$ *para cada* $A \in \mathscr{A}$.

De la definición anterior se pueden deducir otras propiedades que reflejan el buen comportamiento de un *lifting* con respecto a las operaciones habituales entre conjuntos, así como el hecho de que respeta la μ-medida de los conjuntos de $\mathscr{A}$.

Proposición B.1.2. *Si $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ es un* lifting *para $\mathscr{A}$, entonces para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$ se verifica*

1. $\rho(A \cup B) = \rho(A) \cup \rho(B)$.
2. $\rho(A \setminus B) = \rho(A) \setminus \rho(B)$.
3. *Si $A \subseteq B$ entonces $\rho(A) \subseteq \rho(B)$.*
4. $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$.
5. $\mu(\rho(A)) = \mu(A)$.
6. *$\rho[\mathscr{A}]$ es una subálgebra de $\mathscr{A}$ contenida en $\{A \in \mathscr{A} : 0 < \mu(A) < \mu(\Omega)\} \cup \{\Omega, \emptyset\}$.*
7. *Si $\mathscr{A}$ es una σ-algebra entonces para cada sucesión $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \rho(\mathscr{A})$ se tiene que $\rho(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

Demostración. 1. $\Omega \setminus (\rho(A) \cup \rho(B)) = (\Omega \setminus \rho(A)) \cap (\Omega \setminus \rho(B)) = \rho(\Omega \setminus A) \cap \rho(\Omega \setminus B) = \rho(\Omega \setminus (A \cup B)) = \Omega \setminus \rho(A \cup B)$.

2. $\rho(A \setminus B) = \rho(A \cap (\Omega \setminus B)) = \rho(A) \cap (\Omega \setminus \rho(B))$.
3. Si $A \setminus B = \emptyset$ entonces $\rho(A) \setminus \rho(B) = \rho(A \setminus B) = \emptyset$.

4. Basta usar (i) y (ii) de la definición B.1.1.
5. Como $\mu(A\Delta\rho(A)) = 0$ por (i), deducimos que $|\mu(A) - \mu(\rho(A))| = |\mu(A\setminus\rho(A)) - \mu(\rho(A)\setminus A)| \leq \mu(A\setminus\rho(A)) + \mu(\rho(A)\setminus A) = \mu(A\Delta\rho(A)) = 0$.
6. Veamos que $\rho[\mathscr{A}]$ es un álgebra: $\emptyset, \Omega \in \rho(\mathscr{A})$ por (iii), es cerrado para complementarios por (v) y para uniones por 1. de esta misma proposición. Para la última parte observemos que si $\mu(\rho(A)) = 0$ entonces $\mu(A\Delta\emptyset) = \mu(A) = \mu(\rho(A)) = 0$ de modo que $\rho(A) = \rho(\emptyset) = \emptyset$ por b) y c). Por otro lado, si $\mu(\rho(A)) = 1$ entonces $\mu(\rho(\Omega\setminus A)) = 0$ de donde $\Omega\setminus\rho(A) = \emptyset$ por lo que acabamos de demostrar y $\rho(A) = \Omega$.
7. Sea $A = \cup_n A_n$. Para cada número natural n, como $A_n \subseteq A$ deducimos $A_n \subseteq \rho(A_n) \subseteq \rho(A)$ por 3. de esta misma proposición.

□

Teorema B.1.3. *Si d es una densidad sobre un álgebra $\mathscr{A}$ con $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \Sigma$ entonces existe un* lifting *ρ sobre $\mathscr{A}$ tal que*

$$d(A) \subseteq \rho(A) \subseteq d(A^c)^c, \text{ para cada } A \in \mathscr{A}. \tag{B.2}$$

Demostración. Para cada $t \in \Omega$ denotemos $\mathscr{F}(t) = \{A \in \mathscr{A} : t \in d(A)\}$. De las propiedades de una densidad deducimos que $\Omega \in \mathscr{F}(t)$, ya que $t \in \Omega = d(\Omega)$. Para cada par $A, B \in \mathscr{F}(t)$ es $t \in d(A) \cap d(B) = d(A\cap B)$, luego $A\cap B \in \mathscr{F}(t)$. Con ésto queda probado que $\mathscr{F}(t)$ es una base de filtro sobre Ω. Para cada $t \in \Omega$ fijamos $\mathscr{U}(t)$ un ultrafiltro más fino que $\mathscr{F}(t)$.

Consideramos la aplicación $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{P}(\Omega)$ definida en cada $A \in \mathscr{A}$ como

$$\rho(A) = \{t \in \Omega : A \in \mathscr{U}(t)\}.$$

Vamos a comprobar comprobar que $\rho[\mathscr{A}] \subseteq \mathscr{A}$, verifica las propiedades de *lifting* y la ecuación (B.2) del enunciado.

Por las propiedades de los ultrafiltros sabemos que $A \in \mathscr{U}(t)$ si y sólo si $\Omega\setminus A \notin \mathscr{U}(t)$, o dicho de otra forma, $t \in \rho(A)$ si y sólo si $t \notin \rho(\Omega\setminus A)$ lo que nos da (v) $\Omega\setminus\rho(A) = \rho(\Omega\setminus A)$. Asimismo, las propiedades de filtro garantizan que $A\cap B \in \mathscr{U}(s)$ si y sólo si $A, B \in \mathscr{U}(s)$, de donde (iv) $\rho(A\cap B) = \rho(A)\cap\rho(B)$.

Probaremos ahora la cadena de desigualdades (B.2) y de ella deduciremos que $\rho[\mathscr{A}] \subseteq \mathscr{A}$. Si $A \in \mathscr{A}$ y $t \in d(A)$ entonces $A \in \mathscr{F}(t) \subseteq \mathscr{U}(t)$, de modo que $t \in \rho(A)$ por definición. Por tanto $d(A) \subseteq \rho(A)$, pero la misma fórmula será válida sustituyendo A por $\Omega\setminus A$, obteniendo en ese caso que $d(\Omega\setminus A) \subseteq \rho(\Omega\setminus A) = \Omega\setminus\rho(A)$, y tomando complementarios nos queda $\rho(A) \subseteq d(A^c)^c$.

Por la definición de densidad sabemos que $\mu(A\Delta d(A)) = 0$ y $\mu(A\Delta d(A^c)^c) = 0$, donde esta última igualdad se sigue de que $A\Delta d(A^c)^c = A^c\Delta d(A^c)$. Usando las desigualdades (B.2)

$$A\Delta\rho(A) = (A\setminus\rho(A))\cup(\rho(A)\setminus A) \subseteq (A\setminus d(A))\cup(d(A^c)^c\setminus A) \subseteq (A\Delta d(A))\cup(A\Delta d(A^c)^c),$$

con lo que (i) $\mu(A\Delta\rho(A)) = 0$.

La misma desigualdad del enunciado y el hecho de que $d(\emptyset) = \emptyset, d(\Omega) = \Omega$ muestra también que (iii) $\rho(\emptyset) = \emptyset$ y $\rho(\Omega) = \Omega$.

Sea $N \in \mathscr{A}$ con $\mu(N) = 0$. Entonces sabemos que $d(N) = d(\emptyset) = \emptyset$ (notar que $N \in \mathscr{A}$ pues $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{A}$) y $d(N^c) = d(\Omega) = \Omega$, de modo que $\rho(N) = \emptyset$ por (B.2).

Supongamos ahora que $A, B \in \mathscr{A}$ son elementos tales que $\mu(A \Delta B) = 0$. Acabamos de ver que eso implica que $\emptyset = \rho(A \Delta B)$. Usando que ρ conserva uniones (pues ya hemos probado que conserva intersecciones y complementarios) deducimos que $\rho(A)\Delta\rho(B) = \rho(A\Delta B) = \emptyset$, y por tanto $\rho(A) = \rho(B)$. Ésto prueba (b).

Por último veamos que $\rho[\mathscr{A}] \subseteq \mathscr{A}$. Si A es un elemento de $\mathscr{A}$, la desigualdad (B.2) permite obtener

$$\rho(A) \setminus d(A) \subseteq d(A^c)^c \setminus d(A) = d(A^c)^c \cap d(A)^c = \Omega \setminus (d(A^c) \cup d(A)),$$

de modo que $\mu(\rho(A) \setminus d(A)) \leq \mu(\Omega) - (\mu(A^c) + \mu(A)) = 0$. Por hipótesis $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{A}$ de modo que $\rho(A) \setminus d(A) \in \mathscr{A}$. Dado que $\rho(A) \supseteq d(A) \in \mathscr{A}$, concluimos que $\rho(A) \in \mathscr{A}$. □

Teorema B.1.4. *Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{A}_n$ es una σ-álgebra y $\rho_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}_n$ un* lifting *verificando $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{A}_n \subseteq \mathscr{A}_{n+1} \subseteq \Sigma$ y $\rho_n = \rho_{n+1}|_{\mathscr{A}_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathscr{A}$ es la σ-algebra generada por $\cup_n \mathscr{A}_n$ entonces existe un* lifting *$\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ con $\rho|_{\mathscr{A}_n} = \rho_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Basta construir una densidad d sobre $\mathscr{A}$ con $d(A) = \rho_n(A)$ para cada $A \in \mathscr{A}_n$ y $n \in \mathbb{N}$ y usar el teorema B.1.3. En efecto, si ρ es el *lifting* sobre $\mathscr{A}$ obtenido a partir de d aplicando dicho teorema y $A \in \mathscr{A}_n$, entonces de $d(A) = \rho_n(A) = \rho_n(A^c)^c = d(A^c)^c$, y por (B.2) deducimos $\rho(A) = \rho_n(A)$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotaremos por $\mathscr{F}_k$ al conjunto $\rho_k[\mathscr{A}_k]$. Dados $A \in \mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}$ y $r < 1$ pongamos

1. $\mathscr{D}(A,k,r) := \{E \in \mathscr{F}_k : \mu(A \cap F) \geq r\mu(F) \text{ si } E \supseteq F \in \mathscr{F}_k\}$
2. $d(A,k,r) := \bigcup \mathscr{D}(A,k,r) = \cup_{E \in \mathscr{D}(A,k,r)} E$
3. $d(A) := \cap_{0<r<1} \cup_{n \in \mathbb{N}} \cap_{k \geq n} d(A,k,r)$

Vamos a ver que la función $d : \mathscr{A} \to \mathscr{P}(\Omega)$ así definida verifica $d[\mathscr{A}] \subseteq \mathscr{A}$ y verifica las propiedades de densidad.

Afirmación: $d(A,k,r)$ es el mayor conjunto (para la inclusión) que pertenece a $\mathscr{D}(A,k,r)$, luego $d(A,k,r) \in \mathscr{F}_k \subseteq \mathscr{A}$.

Notemos que si $\mathscr{D}(A,k,r) = \emptyset$ entonces $d(A,k,r)$ también es vacío y no hay nada que demostrar. Si $\mathscr{D}(A,k,r)$ es no vacío entonces, un sencillo argumento con el lema de Zorn nos permite encontrar una familia (no vacía) maximal $\mathscr{K}$ de elementos de $\mathscr{D}(A,k,r)$ que son disjuntos y de μ-medida positiva. Notemos que dicha familia debe ser contable $\mathscr{K} = \{B_n : n \in D\}$ ($D \subseteq \mathbb{N}$), ya que $\mu(\Omega) < +\infty$. Llamando $B := \rho_k(\bigcup \mathscr{K}) = \rho_k(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n)$ tenemos que $B \in \mathscr{F}_k$, y si $B \supseteq F \in \mathscr{F}_k$ entonces $B_n \supseteq F \cap B_n \in \mathscr{F}_k$, luego

$$\mu(A \cap F) = \sum_{n \in D} \mu(A \cap F \cap B_n) \geq r \sum_{n \in D} \mu(F \cap B_n) = r\,\mu(F).$$

Ésto prueba que $B \in \mathscr{D}(A,k,r)$. Para ver que es el mayor elemento de dicho conjunto para la inclusión, observar que si $E \in \mathscr{D}(A,k,r)$ y $E \cap B = \emptyset$ entonces E es disjunto con los elementos de $\mathscr{K}$ (ya que $\bigcup \mathscr{K} \subseteq \rho_k(\bigcup \mathscr{K})$ por la proposición B.1.2 apartado 7). Por la maximalidad de $\mathscr{K}$

debe ser E de medida nula, y como está en $\mathscr{F}_k = \rho_k[\mathscr{A}_k]$ deducimos que debe ser $E = \emptyset$. De este modo, si $E \in \mathscr{D}(A,k,r)$ entonces necesariamente $E \setminus B = \emptyset$ por lo que acabamos de demostrar, es decir, $E \subseteq B$. Por tanto, $d(A,k,r) = B \in \mathscr{F}_k \subseteq \mathscr{A}$. Con esto termina la prueba de la afirmación.

$\boxed{d[\mathscr{A}] \subseteq \mathscr{A}}$:Sea $A \in \mathscr{A}$ arbitrario. Si $r < s < 1$ entonces $d(A,k,r) \supseteq d(A,k,s)$, ya que $\mathscr{D}(A,k,r) \supseteq \mathscr{D}(A,k,s)$. De este modo, cuando en la definición de $d(A)$ escribimos la intersección sobre todos los reales de $r \in (0,1)$ basta que hagamos la intersección sobre todos los racionales $0 < r < 1$, que es una intersección numerable. Esto muestra que $d(A) \in \mathscr{A}$.

$\boxed{d(A) = \rho_n(A) \text{ para cada } A \in \mathscr{A}_n,\, n \in \mathbb{N}}$. Si $k \geq n$ y $\rho_n(A) \supseteq F \in \mathscr{F}_k$ entonces $\mu(A \cap F) = \mu(\rho_k(A) \cap F) = \mu(\rho_n(A) \cap F) = \mu(F) \geq r\mu(F)$. Luego $\rho_n(A) \in \mathscr{D}(A,k,r)$ por definición y $d(A,k,r) \supseteq \rho_n(A)$ por la afirmación que hemos probado antes. Por otro lado, $d(A,k,r) \setminus \rho_n(A)$ pertenece a $\mathscr{F}_k$ $(k \geq n)$, luego

$$0 = \mu((d(A,k,r) \setminus \rho_n(A)) \cap A) \geq r\mu((d(A,k,r) \setminus \rho_n(A))$$

implica que $d(A,k,r) \setminus \rho_n(A) = \emptyset$ por las propiedades del *lifting*. Por tanto, $\rho_n(A) = d(A,k,r)$ para cada $k \geq n$ y $r < 1$, de donde se deduce el resultado.

Veamos que $\boxed{d \text{ es una densidad}}$:

(i) Si $\mu(A \Delta B) = 0$ entonces para cada elemento $F \in \mathscr{A}$ se tiene que $\mu(A \cap F) = \mu(B \cap F)$, de donde se deduce que $\mathscr{D}(A,k,r) = \mathscr{D}(B,k,r)$ para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ y $r \in (0,1)$.

(ii) Sea $A \in \mathscr{A}$ y definamos la aplicación $d' : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ como

$$d'(A) = \bigcup_{0<r<1} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} d(A,k,r).$$

La aplicación d' está bien definida igual que razonábamos en el caso de d. Además posee las siguienes propiedades (lo probamos después):

(a) $\mu(d'(A) \cap A^c) = 0$.
(b) $\mu(d'(A^c) \cap A) = 0$.
(c) $d'(A^c) \supseteq d(A)^c$, $d'(A) \supseteq d(A)$.

De estas propiedades se sigue que $\mu(A \Delta d(A)) = 0$ pues

$$d(A)\Delta A = (d(A) \cap A^c) \cup (A \cap d(A)^c) \subseteq (d'(A) \cap A^c) \cup (A \cap d'(A^c)).$$

Vamos entonces a probar (a), (b) y (c). Fijado $r \in (0,1)$ escribiremos $D_k = d(A,k,r)$ para $k \in \mathbb{N}$. Como D_k pertenece a $\mathscr{D}(A,k,r)$, entonces para cada $B \in \mathscr{A}_k$ es

$$\mu(A \cap B \cap D_k) = \mu(A \cap \rho_k(B) \cap D_k) \geq r\mu(D_k \cap \rho_k(B)) = r\mu(D_k \cap B).$$

Supongamos que $B \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{A}_n$. Entonces existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \mathscr{A}_n$. Si $m \geq n$ entonces $\mathscr{A}_m \supseteq \mathscr{A}_n$ y llamando $C_m = B \cap (D_m \setminus \cup_{n \leq k < m} D_k)$ tenemos que

$$\mu\left(A \cap B \cap \bigcup_{k \geq n} D_k\right) = \sum_{m \geq n} \mu(A \cap C_m) \geq \sum_{m \geq n} r\mu(C_m) = r\mu\left(B \cap \bigcup_{k \geq n} D_k\right).$$

Tomando intersecciones sobre $n \in \mathbb{N}$ y usando que μ es numerablemente aditiva obtenemos

$$\mu\left(A \cap B \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} D_k\right) \geq r\mu\left(B \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} D_k\right). \tag{B.3}$$

Podemos extender la ecuación (B.3) a todos los conjuntos $B \in \mathscr{A}$. En efecto, sabemos que es cierta para los elementos de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_n$, que es un álgebra. La σ-álgebra engendrada por $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_n$ es la familia de todas las uniones e intersecciones numerables de elementos de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_n$ (es obvio que cumple todas las propiedades), de manera que la ecuación (B.3) se puede extender a esta σ-álgebra tomando límite de sucesiones monótonas (crecientes para las uniones, decrecientes para las intersecciones). En particular, para $B = A^c$ se tiene que $\mu(A^c \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} D_k) = 0$ ya que $r \in (0,1)$.
Tomando la unión para todos los racionales $r \in (0,1)$ se deduce que $\mu(A^c \cap d'(A)) = 0$, lo que prueba (a). Sustituyendo A por A^c en (a) se obtiene (b).
Para ver (c) sea $k \in \mathbb{N}$, $r \in (0,1)$ y probemos que

$$d(A,k,r)^c \subseteq d(A^c,k,1-r).$$

Si $\emptyset \neq E \in \mathscr{F}_k$ y $E \subseteq d(A,k,r)^c$ entonces $E \notin \mathscr{D}(A,k,r)$ (pues $d(A,k,r)$ era el mayor elemento de $\mathscr{D}(A,k,r)$), de modo que podemos encontrar $F \in \mathscr{F}_k$ contenido en E tal que $\mu(A \cap F) < r\mu(F)$. Si consideramos el conjunto formado por todas las familias de subconjuntos disjuntos $F \in \mathscr{F}_k$ de E con esta propiedad, observaremos que es una familia inductiva para la inclusión (y no vacía como acabamos de probar) de modo que podemos usar el lema de Zorn para obtener una familia maximal $\{F_n : n \in N \subseteq \mathbb{N}\}$ (debe ser contable ya que el espacio de medida es finito y todos los miembros de la familia son disjuntos con medida positiva). Deducimos que $E \setminus \rho_k(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)$ debe ser vacío, pues de lo contrario tendría medida positiva por las propiedades de los *liftings* y podríamos razonar como antes para obtener un subconjunto F' de $E \setminus \rho_k(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)$ con $\mu(A \cap F') < r\mu(F')$, contradiciendo la maximalidad de la familia. Por tanto, $E = \rho_k(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)$ y además

$$\mu(A \cap E) = \sum_{n\in N} \mu(A \cap F_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} r\mu(F_n) = r\mu(E).$$

Como consecuencia

$$\mu(A^c \cap E) = \mu(E) - \mu(A \cap E) \geq (1-r)\mu(E).$$

Ya que E era arbitrario en las condiciones de arriba podemos afirmar que $d(A,k,r)^c \in \mathscr{D}(A^c,k,1-r)$. Por tanto,

$$d(A)^c = \bigcup_{r\in(0,1)} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} d(A,k,r)^c \subseteq \bigcup_{r\in(0,1)} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} d(A^c,k,1-r) = d'(A^c)$$

de donde deducimos (c).

(iii) $d(\emptyset) = \emptyset$ y $d(\Omega) = \Omega$ ya que d extiende a los ρ_n como hemos visto antes.

(iv) Supongamos que $A, B \in \mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}$ y $r < 1$. Si $F \in \mathscr{F}_k$ está contenido en $d(A,k,\frac{r+1}{2}) \cap d(B,k,\frac{r+1}{2})$ entonces

$$\begin{aligned}\mu(A \cap B \cap F) &= \mu(A \cap F) + \mu(B \cap F) - \mu((A \cup B) \cap F) \\ &\geq \frac{r+1}{2}\mu(F) + \frac{r+1}{2}\mu(F) - \mu(F) = r\mu(F).\end{aligned}$$

Por tanto $d(A,k,\frac{r+1}{2}) \cap d(B,k,\frac{r+1}{2}) \subseteq d(A \cap B, k, r)$. Vamos a ver que ésto implica que $d(A) \cap d(B) \subseteq d(A \cap B)$. En efecto, si $t \in d(A) \cap d(B)$ entonces para cada $r < 1$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $t \in \bigcap_{k \geq n_1} d(A,k,\frac{r+1}{2})$ y $t \in \bigcap_{k \geq n_2} d(B,k,\frac{r+1}{2})$. Tomando n el mayor de los n_i, tenemos que

$$t \in \bigcap_{k \geq n} \left(d(A,k,\frac{r+1}{2}) \cap \mathscr{D}(B,k,\frac{r+1}{2}) \right) \subseteq \bigcap_{k \geq n} d(A \cap B, k, r),$$

luego $t \in d(A \cap B)$. El recíproco es consecuencia de que $d(A \cap B, k, r) \subseteq d(A,k,r) \cap d(B,k,r)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $r < 1$.

$\square$

Lema B.1.5. *Sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra con $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \Sigma$ y ρ un* lifting *sobre $\mathscr{A}$. Si $A \in \Sigma \setminus \mathscr{A}$ entonces el álgebra $\mathscr{A}'$ engendrada por $\mathscr{A} \cup \{A\}$ admite un* lifting *que extiende a ρ.*

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \rho[\mathscr{A}]$ y $\mathscr{C} = \{F \in \mathscr{F} : \mu(F \setminus A) = 0\}$. Usando el lema de Zorn es podemos encontrar una familia maximal de elementos disjuntos de $\mathscr{C}$. Dicha familia maximal debe ser contable $\{F_n : n \in N \subseteq \mathbb{N}\}$, ya que no admitimos que los conjuntos aparezcan repetidos y la medida μ es finita. Llamando $A_1 = \rho(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) \in \mathscr{A}$ llegamos a que $\mu(A_1 \setminus A) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \setminus A) = 0$, es decir, $A_1 \in \mathscr{C}$. Por maximalidad deducimos $F \setminus A_1 = \emptyset$ para cada $F \in \mathscr{C}$, es decir, A_1 es el mayor elemento de $\mathscr{C}$ para la inclusión. Análogamente tomamos A_2 el mayor elemento $F \in \mathscr{F}$ con $\mu(F \cap A) = \mu(F \setminus A^c) = 0$. Es interesante notar que

$$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \cap A_2 \cap A) + \mu(A_1 \cap A_2 \cap A^c) = 0$$

luego $A_1 \cap A_2 = \rho(A_1) \cap \rho(A_2) = \rho(A_1 \cap A_2) = \emptyset$ por las propiedades del *lifting*. Pongamos $\overline{A} = (A \cup A_1) \setminus A_2$ y $\overline{A^c} = (A^c \cup A_2) \setminus A_1$. Notar que

$$\overline{A}^c = (A \cup A_1)^c \cup A_2 = (A^c \cap A_1^c) \cup A_2 = (A^c \setminus A_1) \cup A_2 = (A^c \cup A_2) \setminus A_1 = \overline{A^c}.$$

Por otro lado

$$\overline{A} \Delta A = ((A \cup A_1) \setminus (A \cup A_2)) \cup (A \setminus ((A \cup A_1) \setminus A_2)) \subseteq (A_1 \setminus A) \cup (A \cap A_2),$$

de donde $\mu(\overline{A} \Delta A) = 0$, esto es, $\overline{A} \Delta A \in \mathscr{N}$. Como $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{N}$ por hipótesis, entonces $\mathscr{A}'$ también se puede ver como el álgebra generada por $\mathscr{A} \cup \{\overline{A}\}$. Concretamente

$$\mathscr{A}' = \{(C \cap \overline{A}) \cup (D \cap \overline{A^c}) : C, D \in \mathscr{A}\}. \tag{B.4}$$

Si $M = (C\cap\overline{A})\cup(D\cap\overline{A^c})$ diremos que *C y D determinan a M*. Para ver que $\mathscr{A}'$ es el álgebra generada por $\mathscr{A}$ y A notemos que tomando $C = D$ tenemos que $C \in \mathscr{A}'$ para cada $C \in \mathscr{A}$, y $\overline{A} \in \mathscr{A}'$ tomando $C = \Omega, D = \emptyset$. Es un álgebra pues contiene al total y al vacío, es claramente cerrado para uniones finitas, y también para complementarios pues $(C^c \cap \overline{A}) \cup (D^c \cap \overline{A^c})$ es el complementario de $(C\cap\overline{A})\cup(D\cap\overline{A^c})$. Obviamente cualquier álgebra conteniendo a $\mathscr{A}$ y a A debe contener también a $\overline{A}$ y $\overline{A^c}$, y por tanto a $\mathscr{A}'$.

Se tienen también las siguientes propiedades para cualesquiera $E, F \in \mathscr{F}$:

(a) Si $\mu((E\cap\overline{A})\Delta(F\cap\overline{A})) = 0$ entonces $E\cap\overline{A} = F\cap\overline{A}$.
(b) Si $\mu((E\cap\overline{A^c})\Delta(F\cap\overline{A^c})) = 0$ entonces $E\cap\overline{A^c} = F\cap\overline{A^c}$.

Haremos el razonamiento para el primer caso pues el otro es análogo. Si $\mu((E\cap\overline{A})\Delta(F\cap\overline{A})) = 0$ entonces $\mu((E\Delta F)\cap A) = \mu((E\Delta F)\cap\overline{A}) = 0$, donde en la primera igualdad hemos usado que $\mu(A\Delta\overline{A}) = 0$. Luego, por la definición de A_2 deducimos que $E\Delta F \subseteq A_2 \subseteq \overline{A^c}$. Por tanto, $(E\Delta F)\cap\overline{A} = \emptyset$ y concluimos $E\cap\overline{A} = F\cap\overline{A}$.

Definimos ahora $\rho' : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}'$ como

$$\rho'((C\cap\overline{A})\cup(D\cap\overline{A^c})) = (\rho(C)\cap\overline{A})\cup(\rho(D)\cap\overline{A^c}).$$

La aplicación está bien definida (no depende de los representantes C y D elegidos) por (a) y (b), y verifica las propiedades de *lifting*:

(i) Si M es un elemento de $\mathscr{A}'$ determinado por $C, D \in \mathscr{A}$, entonces $\rho'(M)\Delta M$ viene determinado por $\rho(C)\Delta C$ y $\rho(D)\Delta D$, de modo que

$$\mu(M\Delta\rho'(M)) \le \mu(C\Delta\rho(C)) + \mu(D\Delta\rho(D)) = 0.$$

(ii) Si M_1 y M_2 son dos elementos de $\mathscr{A}'$ determinados por C_1, D_1 y C_2, D_2 respectivamente, entonces

$$0 = \mu(M_1\Delta M_2) = \mu((C_1\cap\overline{A})\Delta(C_2\cap\overline{A})) + \mu((D_1\cap\overline{A})\Delta(D_2\cap\overline{A}))$$

implica que los dos sumandos de la derecha son nulos, y lo mismo ocurrirá si sustituimos los C_i, D_i por sus correspondientes imágenes a través de ρ por la propiedad (i) de la definición de *lifting*. Usando los (a) y (b) anteriores deducimos que $\rho(C_1) = \rho(C_2)$ y $\rho(D_1) = \rho(D_2)$, luego $\rho'(M_1) = \rho'(M_2)$.

(iii) Es claro que $\rho'(\Omega) = \Omega$ y $\rho'(\emptyset) = \emptyset$.

(iv) Sean M_1 y M_2 son elementos de $\mathscr{A}'$, de manera que cada M_i viene determinado por C_i, D_i. Entonces $M = M_1\cap M_2$ está determinado por $C = C_1\cap C_2$ y $D = D_1\cap D_2$, de manera que usando $\rho(C_1\cap C_2) = \rho(C_1)\cap\rho(C_2)$ y lo análogo para los D_i se deduce que $\rho'(M_1\cap M_2) = \rho'(M_1)\cap\rho'(M_2)$.

(v) Si M está determinado por C, D entonces basta usar que $\Omega\setminus M$ viene determinado por $(\Omega\setminus C)$ y $(\Omega\setminus D)$ como hemos visto al probar que $\mathscr{A}'$ era un álgebra, de manera que

$$\begin{aligned}\rho'(\Omega\setminus M) &= (\rho(\Omega\setminus C)\cap\overline{A})\cup(\rho(\Omega\setminus D)\cap\overline{A^c}) = (\overline{A}\setminus\rho(C))\cup(\overline{A^c}\setminus\rho(D))\\ &= \Omega\setminus\big((\rho(C)\cap\overline{A})\cup(\rho(D)\cap\overline{A^c})\big) = \Omega\setminus\rho'(M).\end{aligned}$$

□

Teorema B.1.6. *Si* (Ω, Σ, μ) *es un espacio de medida completo finito entonces admite un* lifting.

Demostración. Sea $\mathscr{H}$ la familia de todos los pares $(\mathscr{A}, \rho)$ donde $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra contenida en Σ y que contiene a $\mathscr{N}$ (la familia de los conjuntos de medida nula) y ρ es un *lifting* en $\mathscr{A}$. Podemos ordenar esta familia escribiendo $(\mathscr{A}, \rho) \leq (\mathscr{A}', \rho')$ si y sólo si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$ y $\rho'|_{\mathscr{A}} = \rho$. Se trata obviamente de un orden parcial. Vamos a probar que cualquier cadena de elementos en $\mathscr{H}$, $\mathscr{C} = \{(\mathscr{A}_i, \rho_i) : i \in I\}$ tiene una cota superior en $\mathscr{H}$ distinguiendo dos casos.

1. Si $\mathscr{C}$ contiene una subfamilia cofinal numerable $\mathscr{C}' = \{(\mathscr{A}_{i_n}, \rho_{i_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ entonces, por el teorema B.1.4, podemos encontrar una cota superior de $\mathscr{C}'$ en $\mathscr{H}$, que también será una cota superior de la cadena $\mathscr{C}$ por la cofinalidad.
2. Si $\mathscr{C}$ no contiene ninguna subfamilia cofinal numerable entonces tomamos $\mathscr{A} = \cup_{i\in I}\mathscr{A}_i$ y $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ como $\rho(A) = \rho_i(A)$ si $A \in \mathscr{A}_i$. $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra pues precisamente la condición de no existencia de una subfamilia numerable cofinal implica que $\mathscr{A}$ es cerrada para uniones numerables. Por otro lado, el hecho de que $\mathscr{C}$ es una cadena implica que la aplicación ρ está bien definida y es un *lifting*.

□

B.2. Descomposición de medidas finitamente aditivas

En lo que sigue (Ω, Σ, μ) será un espacio de probabilidad completo. Si $\mathscr{A}$ es subfamilia de elementos de Σ y $B \in \Sigma$, escribiremos $\mathscr{A}_B := \{A \in \mathscr{A} : A \subseteq B\}$, $\mathscr{A}^+ = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) > 0\}$ y $\mathscr{A}_B^+ = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) > 0, A \subseteq B\}$.

Fijaremos un *lifting* $\rho : \Sigma \to \Sigma$ sobre (Ω, Σ, μ), de manera que $\rho[\Sigma]$ es una subálgebra de Σ. Escribimos $\mathscr{M} := \rho[\Sigma] \setminus \{\emptyset\}$ en todo lo que sigue.

Definición B.2.1. *Una* medida (signada) finitamente aditiva *es una función* $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ *tal que*

1. $\lambda(\emptyset) = 0$.
2. $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ *si* $A, B \in, \Sigma$ *son disjuntos.*

La *variación* de λ es la función $|\lambda| : \Sigma \to [0, \infty]$ se define como

$$\begin{aligned} |\lambda|(A) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |\lambda(A_i)| : \ (A_i)_{i=1}^m \text{ es } \Sigma\text{-partición finita de } A \right\} \\ &= \sup \{|\lambda(C)| + |\lambda(A \setminus C)| : C \in \Sigma_A\}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se debe a que en una suma finita $\sum_{i=1}^m |\lambda(A_i)|$ podemos agrupar los términos negativos por un lado y no negativos por otro, de manera que al ser finitamente aditiva nos queda una suma de dos términos. Se dice que λ *es de variación acotada* si $|\lambda|(\Omega) < \infty$, o equivalentemente, $\sup\{|\lambda(A)| : A \in \Sigma\} < \infty$.

En estas condiciones, la función $|\lambda|:\Sigma\to[0,+\infty)$ es una medida finitamente aditiva. En efecto, si $A,B\in\Sigma$ son elementos disjuntos entonces para cualesquiera particiones $(A_i)_{i=1}^m$ de A y $(B_j)_{j=1}^n$ de B se tiene que

$$\sum_{i=1}^m|\lambda(A_i)|+\sum_{j=1}^n|\lambda(B_j)|\le|\lambda|(A\cup B),$$

y tomando supremos en cada caso se prueba $|\lambda|(A)+|\lambda|(B)\le|\lambda|(A\cup B)$. Recíprocamente, para cada $C\in\Sigma_{A\cup B}$ se verifica

$$\begin{aligned}|\lambda(C)|+|\lambda((A\cup B)\setminus C)|&\le|\lambda(A\cap C)|+|\lambda(A\cap B)|+|\lambda(A\setminus(A\cap C))|+|\lambda(B\setminus(B\cap C))|\\&\le|\lambda|(A)+|\lambda|(B),\end{aligned}$$

de donde se deduce $|\lambda|(A\cup B)\le|\lambda|(A)+|\lambda|(B)$.

Para una medida de variación acotada λ definimos las partes positiva y negativa de λ como las funciones $\lambda^+,\lambda^-:\Sigma\to[0,+\infty)$ respectivamente dadas por

$$\lambda^+(A)=\sup\{\lambda(B):B\in\Sigma_A\}\qquad\lambda^{-1}(A)=\sup\{-\lambda(B):B\in\Sigma_A\}.$$

Lema B.2.2. *En las condiciones anteriores se verifica que:*

(a) $\lambda=\lambda^+-\lambda^-$ *y* $|\lambda|=\lambda^++\lambda^-$.
(b) Las aplicaciones λ^+ *y* λ^- *son medidas finitamente aditivas.*
(c) Si $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$ *es una descomposición como diferencia de medidas finitamente aditivas no negativas entonces* $0\le\lambda^+\le\lambda_1$ *y* $0\le\lambda^-\le\lambda_2$.

Demostración. Vamos a ver (a). Fijado $\varepsilon>0$ podemos encontrar $B,C\in\Sigma_A$ tales que $\lambda^+(A)\ge\lambda(B)\ge\lambda^+(A)-\varepsilon$ y $\lambda^-(A)\ge-\lambda(C)\ge\lambda^-(A)-\varepsilon$. Podemos suponer que $B\cap C=\emptyset$, ya que si por ejemplo es $\lambda(B\cap C)\ge0$ entonces sustituyendo C por $C\setminus B$ se siguen verificando las desigualdades (si $\lambda(B\cap C)<0$ cambiamos B por $B\setminus C$). Más aún, podemos suponer también que $A\setminus B=C$, ya que si $\lambda(A\setminus(B\cup C))\ge0$ basta sustituir B por $A\setminus C$, y en caso contrario C por $A\setminus B$. De este modo $\lambda(A)=\lambda(B)+\lambda(C)$ y deducimos

$$\lambda^+(A)-\lambda^-(A)-\varepsilon\le\lambda(C)+\lambda(B)\le\lambda^+(A)-\lambda^-(A)+\varepsilon$$

$$\lambda^+(A)+\lambda^-(A)-2\varepsilon\le\lambda(B)-\lambda(C)\le|\lambda|(A).$$

Ésto muestra que $\lambda=\lambda^+-\lambda^-$ y $\lambda^++\lambda^-\le|\lambda|$. Por otro lado, para cada $C\in\Sigma_A$, jugando con los signos de $\lambda(C)$ y $\lambda(A\setminus C)$ se prueba que $|\lambda(C)|+|\lambda(A\setminus C)|\le\lambda^+(A)+\lambda^-(A)$ de modo que $|\lambda|(A)\le\lambda^+(A)+\lambda^-(A)$.

Como consecuencia de las representaciones

$$\lambda^+=\frac{|\lambda|+\lambda}{2}\qquad\lambda^-=\frac{|\lambda|-\lambda}{2}$$

se deduce (b).

Finalmente, si $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$ es una representación como el enunciado entonces para cada $B\in\Sigma_A$ con $\lambda\ge0$ tenemos que $0\le\lambda(B)\le\lambda_1(B)\le\lambda_1(A)$, de donde $0\le\lambda^+(A)\le\lambda(A)$ por la definición de $\lambda^\cdot$. La otra desigualdad es análoga. $\square$

Diremos que una medida finitamente aditiva $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ es *μ-continua* si para cada $A \in \Sigma$ tenemos que $\mu(A) = 0$ implica $\lambda(A) = 0$. Notar que λ es μ-continua si y sólo si $|\lambda|$ lo es, o equivalentemenete, si λ^+ y λ^- lo son. Cuando la medida de partida λ es numerablemente aditiva, es decir, $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$ para toda familia numerable disjunta $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$, entonces la condición de μ-continuidad de λ equivale a que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(A) < \delta$ entonces $|\lambda(A)| < \varepsilon$ (en [26, teorema 1,.p. 10] puede encontrarse una prueba de esta afirmación para medidas vectoriales).

El siguiente lema está inspirado por los argumentos que relacionan dentabilidad de conjuntos y la propiedad de Radon-Nikodým (ver [13, lemma 2.2.5, p. 21]). Probaremos el resultado en una versión más general para medidas finitamente aditivas que no tienen por qué ser μ-continuas. Recordar que el *diámetro* de un subconjunto D de un espacio métrico (X,d) se define como

$$\operatorname{diam}(D) := \sup\{d(x,y) : x,y \in D\}.$$

Lema B.2.3. *Sea $\lambda : \Sigma \to [0,+\infty)$ una medida finitamente aditiva con $\lambda(\Omega) = 1$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathscr{M}$ existe $B \in \mathscr{M}_A$ tal que el diámetro de*

$$\Gamma_B = \left\{ \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} : C \in \mathscr{M}_B \right\}$$

es menor que ε.

Demostración. Escribimos $\alpha = \operatorname{ínf}(\Gamma_A)$. Fijado $\varepsilon > 0$ (arbitrario) tomamos $A_0 \in \mathscr{M}_A$ tal que $\alpha \leq \lambda(A_0)/\mu(A_0) < \alpha + \varepsilon/2$. Probaremos que existe $B \in \mathscr{M}_{A_0}$ satisfaciendo

$$\left| \frac{\lambda(A_0)}{\mu(A_0)} - \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $C \in \mathscr{M}_B$. Supongamos que la afirmación es falsa, lo que significa que para cada $B \in \mathscr{M}_{A_0}$ existe $C \in \mathscr{M}_B$ tal que

$$\left| \frac{\lambda(A_0)}{\mu(A_0)} - \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ésto equivale a

$$\frac{\lambda(C)}{\mu(C)} \geq \frac{\lambda(A_0)}{\mu(A_0)} + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{B.5}$$

ya que en otro caso $\frac{\lambda(A_0)}{\mu(A_0)} - \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ implicaría $\frac{\lambda(C)}{\mu(C)} \leq \frac{\lambda(A_0)}{\mu(A_0)} - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha$, lo que es absurdo.

Usando el lema de Zorn podemos construir una familia maximal $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}_{A_0}$ de conjuntos disjuntos con la propiedad de que cada $C \in \mathscr{A}$ verifica la ecuación (B.5). $\mathscr{A}$ tiene que ser contable ya que $\mu(C) > 0$ para todo $C \in \mathscr{A}$ y la medida μ es finita. Escribimos $B = A_0 \setminus \bigcup_{C \in \mathscr{A}} C \in \Sigma$. Notamos que $\mu(B) = 0$, pues si $\mu(B) > 0$ entonces $\rho(B) \in \mathscr{M}$ y usando las propiedades del *lifting* llegamos a que:

- $\rho(B) \subseteq \rho(A_0) = A_0$, porque $A_0 \in \mathscr{M}$.
- Para cada $C \in \mathscr{A}$ tenemos que $\rho(B) \cap C = \rho(B) \cap \rho(C) = \rho(B \cap C) = \rho(\emptyset) = \emptyset$.

Por hipótesis existe $D \in \mathscr{M}_{\rho(B)} \subseteq \mathscr{M}_{A_0}$ tal que

$$\left| \frac{\lambda(A_0)}{\mu(A_0)} - \frac{\lambda(D)}{\mu(D)} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pero entonces $\mathscr{A} \cup \{D\}$ es una familia de conjuntos disjuntos que contradice la maximalidad de $\mathscr{A}$. Por tanto $\mu(B) = 0$.

Si $\mathscr{A} = \{C_n : n \in N\}$ ($N \subseteq \mathbb{N}$ es contable), usando que λ es finitamente aditiva podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(A_0)}{\mu(A_0)} &\geq \frac{\lambda(B)}{\mu(A_0)} + \sum_{n\in N} \frac{\lambda(C_n)}{\mu(C_n)} \frac{\mu(C_n)}{\mu(A_0)} \\ &\geq \frac{\lambda(B)}{\mu(A_0)} + \left(\frac{\lambda(A_0)}{\mu(A_0)} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sum_{n\in N} \frac{\mu(C_n)}{\mu(A_0)} = \frac{\lambda(B)}{\mu(A_0)} + \frac{\lambda(A_0)}{\mu(A_0)} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

donde hemos usado (B.5) y el hecho de que $\sum_{n\in N} \mu(C_n) = \mu(A_0) - \mu(B) = \mu(A_0)$. Esta desigualdad es absurda, lo que concluye la prueba. $\square$

Sea $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ una medida finitamente aditiva de probabilidad. Denotaremos por $\mho$ a la familia de todas las particiones finitas de Ω en $\mathscr{M}$-conjuntos. Para cada elemento $\pi \in \mho$ denotamos como s_π a la siguiente función simple de $L^1(\mu)$:

$$s_\pi = \sum_{A\in\pi} \frac{\lambda(A)}{\mu(A)} \chi_A.$$

Notar que no hay problemas con los conjuntos μ-nulos gracias a las propiedades del *lifting*.

Bajo la condición de μ-continuidad y las propiedades del *lifting* ρ, los conjuntos Γ_B definidos para cada $B \in \mathscr{M}$ en el lema B.2.3 se pueden reescribir como

$$\Gamma_B = \left\{ \frac{\lambda(C)}{\mu(C)} : C \in \Sigma_B^+ \right\}.$$

Lema B.2.4. *En las condiciones del lema anterior, dados $A \in \mathscr{M}$ y $\varepsilon > 0$ existe una partición finita $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ de A tal que*

1. $A_i \in \mathscr{M}$ *y* $\operatorname{diam}(\Gamma_{A_i}) < \varepsilon$ *para cada* $i = 1, \ldots, m$.
2. $\mu(A_0) < \varepsilon$.

Si $A_0 \neq \emptyset$ entonces escribiremos $p_\varepsilon^A = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$, en otro caso $p_\varepsilon^A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. En cualquier caso siempre será $p_\varepsilon^A \in \mho$.

Demostración. Usando el lema B.2.3 y el lema de Zorn podemos construir una familia maximal p_1 de $\mathscr{M}$-conjuntos disjuntos tales que $\mu(B) > 0$ y $\operatorname{diam}(\Gamma_B) < \varepsilon$ para cada $B \in p_1$. El conjunto $E = \Omega \setminus \bigcup_{B\in p_1} B$ debe ser μ-nulo por maximalidad (en otro caso podríamos volver a usar el lema B.2.3 para obtener un conjunto $C \in \mathscr{M}$ tal que $p_1 \cup \{C\}$ contradice la maximalidad de p_1). Como $\sum_{B\in\pi} \mu(B) = \mu(\Omega)$, existe una subfamilia finita $A_1, \ldots, A_m \subseteq p_1$ satisfaciendo que $A_0 = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i$ tiene μ-medida menor que ε. $\square$

Una medida $\nu : \Sigma \to [0,\infty)$ se dice que es *puramente finitamente aditiva* si cualquier medida $\nu_1 : \Sigma \to [0,\infty)$ numerablemente aditiva que verifique $0 \le \nu_1 \le \nu$ necesariamente debe ser $\nu_1 = 0$. Podemos ahora probar el siguiente teorema:

Teorema B.2.5. *Si $\lambda : \Sigma \to [0,\infty)$ es una medida finitamente aditiva μ-continua entonces existe una función $f \in L^1(\mu)$ no negativa (μ-casi seguramente) y una sucesión decreciente de conjuntos $C_n \in \Sigma$ satisfaciendo $\lim_n \mu(C_n) = 0$ y*

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu + \lim_n \lambda(E \cap C_n) \text{ para cada } E \in \Sigma. \tag{B.6}$$

Además, la aplicación $\nu : \Sigma \to [0,\infty)$ dada por $\nu(E) = \lim_n \lambda(E \cap C_n)$ es una medida puramente finitamente aditiva.

Demostración. Si $\lambda = 0$ entonces el resultado es claro. Si $\lambda \neq 0$ podemos suponer que $\lambda(\Omega) = 1$ multiplicando por una constante adecuada. Dividimos la prueba en dos pasos:

$\boxed{\text{Paso 1:}}$ Probar que existe una sucesión $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mho$ de $\mathscr{M}$-particiones finitas de Ω y una sucesión de conjuntos $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$

1. $\pi_{k+1} \succ \pi_k$ (π_{k+1} es más fino que π_k).
2. D_k es una unión de elementos de π_k y $\mu(D_k) < 1/2^k$.
3. Si $A \in \pi_k$ y $A \cap D_k = \emptyset$ (i. e. $A \nsubseteq D_k$ por ser π_k partición y D_k unión de elementos de dicha partición) entonces $\mu(A) > 0$ y $\operatorname{diam}(\Gamma_A) < 1/2^k$.

Construiremos estas sucesiones de manera inductiva:

- Para $k = 1$ podemos usar el lema B.2.4 con $E = \Omega$ y $\varepsilon = 1/2$, obteniendo una $\mathscr{M}$-partición $\pi_1 = \{D_1 := A_0, A_1, \dots, A_m\}$ verificando las condiciones de arriba.
- Supongamos que hemos construido π_i, D_i ($i = 1, \dots, k$) como arriba. Sea m el número de elementos de π_k. Para cada $A \in \pi_k$ podemos aplicar el lema B.2.4 con $\varepsilon = 1/(m2^{k+1})$ y obtener una $\mathscr{M}$-partición finita π^A_{k+1} de A verificando que: puede tener un elemento A_0 con $\mu(A_0) < 1/(m2^{k+1})$, y para el resto de elementos $B \in \pi^A_{k+1}$ es $\operatorname{diam}(\Gamma_B) < 1/(m2^{k+1})$. Considerando
$$\pi_{k+1} = \bigcup \{\pi^A_{k+1} : A \in \pi_k\}$$
y D_{k+1} como la unión de los elementos de los elementos A_0 de cada una de las particiones π^A_{k+1} (si está), tendremos que $\mu(A_{k+1})$ es menor que $1/2^{k+1}$. El par π_{k+1} y D_{k+1} verifica las tres condiciones de arriba.

$\boxed{\text{Paso 2:}}$ Probaremos que la sucesión de funciones simples s_{π_k} converge en μ-casi todo punto a una función $f \in L^1(\mu)$. Denotando $C_n = \bigcup_{k>n} D_k$, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos verificando $\mu(C_n) < 1/2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, vamos a ver que la sucesión s_{π_k} converge uniformemente sobre $\Omega \setminus C_n$. Sean $p > q > n$ y tomemos un elemento arbitrario $t \in \Omega \setminus C_n$. Observar que $t \in A_p, A_q$ para ciertos $A_p \in \pi_p, A_q \in \pi_q$ verificando $A_p \nsubseteq D_p$ y $A_q \nsubseteq D_q$ (ya que $t \notin C_n \supseteq D_p \cup D_q$). Como π_p es más fino que π_q, deducimos que $A_p \subseteq A_q$. Por tanto,

$$|s_{\pi_p}(t) - s_{\pi_q}(t)| = \left| \frac{\lambda(A_p)}{\mu(A_p)} - \frac{\lambda(A_q)}{\mu(A_q)} \right| \le \operatorname{diam}(\Gamma_{A_q}) < \frac{1}{2^q}.$$

Notemos que esta cota no depende de la elección de $t \in \Omega \setminus C_n$ luego la convergencia es uniforme.

En particular, la sucesión s_{π_k} converge puntualmente sobre $\Omega \setminus C$, donde $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es un conjunto μ-nulo. Si denotamos su límite por f, entonces tenemos que f es medible. Notar que $\|s_{\pi_k}\|_1 \leq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, luego usando que la convergencia es uniforme sobre cada conjunto $\Omega \setminus C_n$ deducimos que $\int_{\Omega\setminus C_n} |f|\, d\mu \leq 1$ para todo n. El teorema de la convergencia monótona nos permite afirmar que para cada $E \in \Sigma$ es

$$\int_E f\, d\mu = \lim_n \int_{E\setminus C_n} f\, d\mu,$$

lo que en particular muestra que $f \in L^1(\mu)$.

Finalmente vamos a comprobar la ecuación (B.6). Fijado $n \in \mathbb{N}$ y tomando $k > n$

$$\int_{E\setminus C_n} s_{\pi_k}\, d\mu = \sum_{A\in\pi_k} \frac{\lambda(A)}{\mu(A)} \mu(A \cap (E \setminus C_n)).$$

$$\left| \lambda(E \setminus C_n) - \int_{E\setminus C_n} s_{\pi_k}\, d\mu \right| \leq \sum_{A\in\pi_k} \left| \frac{\lambda(A)}{\mu(A)} \mu(A \cap (E \setminus C_n)) - \lambda(A \cap (E \setminus C_n)) \right|.$$

Observemos ahora que para cada $A \in \pi_k$ hay dos posibilidades:

1. Si $\mu(A \cap (E \setminus C_n)) = 0$ entonces $\lambda(A \cap (E \setminus C_n)) = 0$ por la μ-continuidad.
2. Si $\mu(A \cap (E \setminus C_n)) > 0$ entonces

$$\left| \frac{\lambda(A)}{\mu(A)} \mu(A \cap (E \setminus C_n)) - \lambda(A \cap (E \setminus C_n)) \right| \leq \frac{1}{2^k} \mu(A \cap (E \setminus C_n)) \leq \frac{1}{2^k} \mu(A).$$

Por tanto

$$\left| \lambda(E \setminus C_n) - \int_{E\setminus C_n} s_{\pi_k}\, d\mu \right| \leq \sum_{A\in\pi_k} \frac{1}{2^k} \mu(A) = \frac{1}{2^k}.$$

Tomando límite en k y usando la convergencia uniforme de la sucesión s_{π_k} sobre $E \setminus C_n$ deducimos que

$$\lambda(E \setminus C_n) = \int_{E\setminus C_n} f\, d\mu.$$

Como resultado, el teorema de la convergencia monótona nos da

$$\lim_n \lambda(E \setminus C_n) = \int_E f\, d\mu.$$

Por último vamos a comprobar que la medida finitamente aditiva ν del enunciado es puramente finitamente aditiva. Supongamos que existe una medida numerablemente aditiva ν_1 satisfaciendo $0 \leq \nu_1 \leq \nu$. Como ν_1 es monótona (pues es no negativa) basta comprobar que $\nu_1(\Omega) = 0$. Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $\nu_1(\Omega \setminus C_m) \leq \nu(\Omega \setminus C_m) = 0$, donde la última igualdad se debe a que $\lambda((\Omega \setminus C_m) \cap C_n) = 0$ si $n > m$. Por tanto, $\nu_1(\Omega \setminus C) = \lim_m \nu_1(\Omega \setminus C_m) = 0$. Por otro lado $\lambda(C) = 0$ al ser μ-continua y $\mu(C) = 0$, luego $\nu_1(C) \leq \nu(C) \leq \lambda(C) = 0$.

□

Observación B.2.6. *La red* $\{s_\pi : \pi \in \mho\}$ *converge uniformemente a* f *sobre* $\Omega \setminus C_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *En particular, converge hacia* f μ*-casi seguramente en* Ω.

Demostración. Siguiendo con la nomenclatura de la demostración del teorema B.2.5, sea $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de particiones pertenecientes a $\mho$ que construimos allí y fijemos números naturales $k > n$. Si $t \in \Omega \setminus C_n$ y $\pi \succ \pi_k$ entonces existen $A \in \pi$ y $A_k \in \pi_k$ tales que $t \in A \subseteq A_k$. Usando que $t \notin D_k$ deducimos $A_k \cap D_k = \emptyset$, luego

$$|s_\pi(t) - f(t)| \leq |s_\pi(t) - s_{\pi_k}(t)| + |s_{\pi_k}(t) - f(t)| \leq \left|\frac{\lambda(A)}{\mu(A)} - \frac{\lambda(A_k)}{\mu(A_k)}\right| + \frac{1}{2^k} \leq \frac{2}{2^k}$$

usando que $\operatorname{diam}(\Gamma_{A_k}) \leq 1/2^k$.

□

Corolario B.2.7. *Sea* $\lambda : \Sigma \to [0,\infty)$ *medida finitamente aditiva* μ*-continua y de variación finita. Entonces* λ *es puramente finitamente aditiva si y sólo si existe una sucesión decreciente* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ *tal que* $\lim_n \lambda(B_n) = \lambda(\Omega)$ *y* $\lim_n \mu(B_n) = 0$.

Demostración. Sabemos que λ se descompone como en (B.6) del teorema anterior. Si λ es puramente finitamente aditiva entonces la desigualdad $0 \leq \int_A f\, d\mu \leq \lambda(A)$ válida para cada $A \in \Sigma$ implica que dicha integral vale siempre cero, luego f es igual a cero en casi todo punto. Así pues $\lambda = \nu$ lo que nos da el resultado.

Recíprocamente, si λ admite una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado entonces es puramente finitamente aditiva razonando como en la parte final de la prueba del teorema B.2.5. □

Diremos que la medida finitamente aditiva $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ es *puramente finitamente aditiva* si λ^+ y λ^- lo son. Podemos extender ahora el teorema B.2.5 a medidas finitamente aditivas con valores reales $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ teniendo además unicidad en dicha descomposición.

Teorema B.2.8. *Si* $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ *es una medida (signada) finitamente aditiva* μ*-continua entonces existe una función* $f \in L^1(\mu)$ *y una medida puramente finitamente aditiva* $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu + \nu(E) \text{ para cada } E \in \Sigma. \tag{B.7}$$

Además la descomposición es única y la función f *es límite en* μ*-casi todo punto de la red* $\{s_\pi : \pi \in \mho\}$.

Demostración. Si λ es μ-continua entonces λ^+ y λ^- también lo son.

Aplicando el teorema B.2.5 con λ^+ y λ^- obtenemos descomposiciones $\lambda^+(E) = \int_E f_1\, d\mu + \nu_1(E)$ y $\lambda^-(E) = \int_E f_2\, d\mu + \nu_2(E)$. De este modo

$$\lambda(E) = \int_E (f_1 - f_2)\, d\mu + (\nu_1 - \nu_2)(E) \text{ para cada } E \in \Sigma.$$

Notar que $\nu = \nu_1 - \nu_2$ es puramente finitamente aditiva pues las desigualdades $0 \leq \nu^+ \leq \nu_1$ y $0 \leq \nu^- \leq \nu_2$ (ver lema B.2.2) implican que ν^+ y ν^- lo son.

Para ver la unicidad supongamos que tenemos dos descomposiciones como en el enunciado:

$$\int_E f_1\,d\mu + \nu_1(E) = \int_E f_2\,d\mu + \nu_2(E) \text{ para cada } E \in \Sigma.$$

Entonces

$$\int_E (f_1 - f_2)\,d\mu = \nu_2(E) - \nu_1(E) \text{ para cada } E \in \Sigma.$$

Sea $A = \{f_1 \geq f_2\}$. Para todo $E \in \Sigma$ es

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_E (f_1 - f_2)^+\,d\mu = \int_{E\cap A} (f_1 - f_2)\,d\mu \\ &= (\nu_2)^+(A\cap E) - (\nu_2)^-(A\cap E) - (\nu_1)^+(A\cap E) + (\nu_1)^-(A\cap E) \\ &\leq (\nu_2)^+(E) + (\nu_1)^-(E). \end{aligned}$$

Como $(\nu_2)^+$ y $(\nu_1)^-$ son puramente finitamente aditivas entonces su suma también lo es por una sencilla aplicación del corolario B.2.7. De este modo $f_1 - f_2 = 0$ en casi todo A, y análogamente se razona en $\{f_1 \leq f_2\}$. Así pues, $f_1 = f_2$ en casi todo punto y deducimos que $\nu_1 = \nu_2$.

Para ver la segunda parte notar que

$$s_\pi = \sum_{A\in\pi} \frac{\lambda(A)}{\mu(A)}\chi_A = \sum_{A\in\pi} \frac{\lambda^+(A)}{\mu(A)}\chi_A - \sum_{A\in\pi} \frac{\lambda^-(A)}{\mu(A)}\chi_A.$$

Basta entonces combinar esta igualdad, la construcción de f al comienzo de esta demostración y la observación B.2.6 para concluir el resultado. $\square$

Corolario B.2.9. *Si $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ es puramente finitamente aditiva entonces existe una sucesión decreciente $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Σ tal que* $\lim_n \mu(B_n) = 0$ *y* $\lambda(A\cap B_n) = \lambda(A)$ *para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sabemos que $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ (partes positiva y negativa) y cada una de estas medidas se descompone como $\lambda_i(A) = \int_A f_i\,d\mu + \nu_i(A)$. Además para cada $i = 1,2$ existe una sucesión $(C_n^i)_n$ decreciente en Σ tal que $\lim_n \mu(C_n^i) = 0$ y $\nu_i(A) = \lim_n \lambda(A\cap C_n^i)$ para cualquier $A \in \Sigma$. Es entonces claro que $\nu_i(A) = \nu_i(A\cap C_m^i)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Llamando $C_m := C_m^1 \cup C_m^2$ tenemos que $\lim_n \mu(C_n) = 0$, y además $\nu_i(A) \geq \nu_i(A\cap C_m) \geq \nu_i(A\cap C_m^i) = \nu_i(A)$, luego $\nu(A) = \nu(A\cap C_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Si λ es puramente finitamente aditiva entonces $f = f_1 - f_2 = 0$ por la unicidad de la descomposición en el teorema anterior, y deducimos que $\lambda = \nu$ verifica la condición del enunciado tomando $B_m := C_m$ por el párrafo anterior. $\square$

B.3. Representación de medidas finitamente aditivas en $L^1(\mu)^{**}$

El espacio de Banach $L^1(\mu)$ se puede ver como un subespacio cerrado de $L^1(\mu)^{**}$ a través de la aplicación $T : L^1(\mu) \to L^1(\mu)^{**}$ definida sobre cada $f \in L^1(\mu)$ como $T(f) : L^\infty(\mu) \to \mathbb{R}$, $T(f)(g) = \int_\Omega fg\,d\mu$.

Supongamos que $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ es una medida finitamente aditiva μ-continua. Identificando cada elemento de $L^1(\mu)$ con su imagen en $L^1(\mu)^{**}$ tenemos que los elementos del conjunto $\{s_\pi : \pi \in \mho\}$ verifican

$$\|s_\pi\|_1 \leq \sum_{A\in\pi} |\lambda(A)| \leq |\lambda|(\Omega).$$

Luego dicha red está contenida en un subconjunto ω^*-compacto de $L^1(\mu)^{**}$ por el teorema de Alaoglu. La familia de conjuntos de la forma $\{\pi : \pi \succ \pi_0\}$ ($\pi_0 \in \mho$) es una base de filtro β sobre $\mho$, luego podemos fijar un ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre $\mho$ que contenga a todos estos conjuntos. Entonces el siguiente límite existe

$$y^{**} = \omega^*\text{-}\lim_{\pi,\mathscr{U}} s_\pi \in L^1(\mu)^{**}.$$

Proposición B.3.1. *La red $\{s_\pi : \pi \in \mho\}$ es ω^*-convergente a un elemento $y^{**} \in L^1(\mu)^{**}$ tal que*

$$y^{**}(\chi_A) = \lambda(A) \tag{B.8}$$

para cada $A \in \Sigma$.

Demostración. Tomemos un ultrafiltro $\mathscr{U}$ como antes y sea y^{**} el ω^*-límite de la red $(s_\pi)_{\pi\in\mho}$ a través de dicho ultrafiltro. Fijemos ahora $A \in \Sigma$. Si $\mu(A) = 1$ entonces χ_Ω y χ_A coinciden en μcasi todo punto, de manera que

$$y^{**}(\chi_A) = y^{**}(\chi_\Omega) = \lim_{\pi,\mathscr{U}} s_\pi(\chi_\Omega) = \lim_{\pi,\mathscr{U}} \lambda(\Omega) = \lambda(\Omega) = \lambda(A).$$

Si $\mu(A) = 0$ el razonamiento es análogo, luego podemos suponer que $0 < \mu(A) < 1$. Dado $\delta > 0$ tomamos $\pi \in \mho$ tal que $\{\rho(A), \Omega \setminus \rho(A)\} \prec \pi \in \mho$ y $|s_\pi(\chi_A) - y^{**}(\chi_A)| < \delta$. Así pues

$$|\lambda(\rho(A)) - y^{**}(\chi_{\rho(A)})| \leq |\lambda(\rho(A)) - s_\pi(\chi_{\rho(A)})| + \delta = \left|\lambda(\rho(A)) - \sum_{B\in\pi} \frac{\lambda(B)}{\mu(B)}\mu(\rho(A)\cap B)\right| + \delta.$$

Si $B \in \pi$ entonces $B \subseteq \rho(A)$ o $B \subseteq \Omega \setminus \rho(A)$, de manera que

$$\left|\lambda(\rho(A)) - \sum_{B\in\pi} \frac{\lambda(B)}{\mu(B)}\mu(\rho(A)\cap B)\right| = \left|\lambda(\rho(A)) - \sum_{B\in\pi, B\subseteq\rho(A)} \lambda(B)\right| = 0.$$

Ésto prueba que $\lambda(A) = \lambda(\rho(A))$ es igual a $y^{**}(\chi_A) = y^{**}(\chi_{\rho(A)})$, donde estamos usando el hecho de que $\mu(A\Delta\rho(A)) = 0$.

Si tomamos otro ultrafiltro $\mathscr{V}$ más fino que la base de filtro β, entonces el nuevo elemento del bidual y_2^{**} también verifica (B.8), luego y^{**} e y_2^{**} coinciden sobre las funciones simples, y por tanto sobre todo $L^1(\mu)^* = L^\infty(\mu)$ por densidad. Usando el apartado (f) del teorema 3.1.3 deducimos que y^{**} es el límite de $\{s_\pi : \pi \in \mho\}$ a través de la base β, esto es, el límite de la red. $\square$

Corolario B.3.2. *Con la notación de la proposición anterior, si ν es la parte puramente finitamente aditiva de λ y f es la función de $L^1(\mu)$ dadas en el teorema B.2.8, entonces la distancia de y^{**} a $L^1(\mu)$ es*

$$d(y^{**}, L^1(\mu)) = d(y^{**}, f) = |\nu|(\Omega).$$

Demostración. Por el corolario B.2.9 existe una sucesión decreciente $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Σ tal que $\text{lím}_n\, \mu(B_n) = 0$ y $\nu(A) = \nu(A \cap B_m)$ para cada $A \in \Sigma$ y $m \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $d(y^{**}, L^1(\mu)) < \eta$, entonces existe $g \in L^1(\mu)$ y tal que $\|y^{**} - g\| < \eta$. La función $h = g - f \in L^1(\mu)$ verifica $\|(y^{**} - f) - h\| < \eta$. Sea $D \in \Sigma$. Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son los signos de $\nu(D)$ y $\nu(\Omega \setminus D)$ respectivamente entonces

$$\begin{aligned}
\eta &> |(y^{**} - f)\,(\varepsilon_1 \chi_{D\cap B_n} + \varepsilon_2 \chi_{D\cap B_n}) - h\,(\varepsilon_1 \chi_{D\cap B_n} + \varepsilon_2 \chi_{D\cap B_n})| \\
&= \left| \varepsilon_1 \nu(D \cap B_n) + \varepsilon_2 \nu((\Omega \setminus D) \cap B_n) - \varepsilon_1 \int_{D\cap B_n} h\,d\mu - \varepsilon_2 \int_{(\Omega\setminus D)\cap B_n} h\,d\mu \right| \\
&= \left| |\nu(D)| + |\nu(\Omega \setminus D)| - \varepsilon_1 \int_{D\cap B_n} h\,d\mu - \varepsilon_2 \int_{(\Omega\setminus D)\cap B_n} h\,d\mu \right|.
\end{aligned}$$

Tomando límite en n deducimos que $|\nu(D)| + |\nu(\Omega \setminus D)| \leq \eta$. Como D era arbitrario se deduce que $|\nu|(\Omega) \leq \eta$. Por tanto, $|\nu|(\Omega) \leq d(y^{**}, L^1(\mu))$.

Por otro lado, para toda función simple $h = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$ (donde A_j es una Σ-partición finita de Ω) se verifica que

$$\begin{aligned}
\left| (y^{**} - f) \left(\sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j} \right) \right| &\leq \sum_{j=1}^m |a_j| \left| (y^{**} - f)(\chi_{A_j}) \right| \\
&\leq \|h\|_\infty \sum_{j=1}^m |\nu(A_j)| \leq \|h\|_\infty |\nu|(\Omega).
\end{aligned}$$

Deducimos entonces $d(y^{**}, f) \leq |\nu|(\Omega)$ usando la densidad de las funciones simples en $L^\infty(\mu)$. $\square$

Apéndice C

Índices de Radon-Nikodým

ESTE capítulo recoge resultados correspondientes a un preprint elaborado junto con los Profesores Bernardo Cascales y Matías Raja (Universidad de Murcia). Hemos considerado oportuno incluir este apéndice ya que el comienzo de estos resultados está marcado por la búsqueda de una derivada general de Radon-Nikodým para medidas vectoriales usando *liftings* y límites a través de ultrafiltros.

A lo largo de este capítulo $(E,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, (Ω,Σ,μ) es un espacio de probabilidad completo. Denotamos por $L^1(\mu,E)$ al espacio de Banach de las funciones Bochner integrables equipado con la norma usual. La notación y terminología coincide con la de [26].

Una función $m:\Sigma\to E$ se dice que es una medida vectorial (numerablemente aditiva) si $m(\emptyset)=0$ y para cualquier familia numerable de elementos disjuntos $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}$ de Σ se tiene que $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)$ en la topología de la norma. Supondremos que las medidas vectoriales con las que trabajamos son μ-continuas, es decir que si $A\in\Sigma$ y $\mu(A)=0$ entonces $m(A)=0$. La variación de m es la función$|m|:\Sigma\to[0,\infty]$ dada por

$$|m|(A)=\sup\left\{\sum_{j=1}^{m}\|m(B_j)\|:\ (B_j)_{j=1}^{m}\text{ es partición finita de }A\text{ en }\Sigma\text{-conjuntos}\right\}.$$

Supondremos que m es de *variación acotada*, es decir, que $|m|(\Omega)<\infty$. En ese caso se tiene que $|m|$ es una medida numerablemente aditiva (ver [26, proposition 9, p.3]).

El teorema de Radon-Nikodým no es cierto en general para medidas vectoriales, motivo por el que se introduce la noción de *propiedad de Radon-Nikodým* (RNP): *se dice que un espacio de Banach* $(E,\|\cdot\|)$ *tiene la RNP si toda medida* $m:\Sigma\to E$ *en las condiciones mencionadas arriba es representable, i.e., existe* $f\in L^1(\mu,E)$ *tal que* $m(A)=\int_A f\,d\mu$ *para cada* $A\in\Sigma$.

Desde sus inicios, la teoría de espacios de Banach ha combinado teoría de la medida, topología y técnicas de otros ámbitos para obtener importantes resultados y aplicaciones. En los últimos años, una nueva tendencia ha surgido en espacios de Banach: estudiar índices relacionados con propiedades analíticas y topológicas (compacidad, medibilidad, integrabilidad, propiedad de Dunford-Pettis, etc.) ofreciendo un nuevo y más profundo punto de vista los conceptos que se estudian mediante la demostración de desigualdades que relacionen dichos índices. Las ventajas de esta aproximación es que resultados clásicos pueden ser refinados, al tiempo que se pueden encontrar otros nuevos.

Nuestra intención es introducir y estudiar índices relacionados con la propiedad de Radon-Nikodým en espacios de Banach para establecer desigualdades entre ellas que nos permitan estimar, por ejemplo, si una medida vectorial $m : \Sigma \to E$ tiene una derivada de Radon-Nikodým *"débil"* f, cómo de lejos está f de ser medible o de tomar valores en el espacio de Banach E. El estudio de estos índices ofrece la ventaja de que aunque el espacio E no tenga la propiedad de Radon-Nikodým, una tal medida m puede todavía tener una derivada de Radon-Nikodým razonable de acuerdo con su *"índice de representabilidad"* $\mathscr{R}(m)$. Este índice $\mathscr{R}(m)$ está definido en C.1.1 y se caracteriza como el ínfimo de todas las constantes δ para las que existe $g \in L^1(\mu, E)$ satisfaciendo

$$\left\| m(A) - \int_A g\, d\mu \right\| \le \delta\, \mu(A), \text{ para todo } A \in \Sigma,$$

(proposición C.1.2). Si partimos de una medida $m : \Sigma \to E^*$ como arriba, $\rho : \Sigma \to \Sigma$ un *lifting* y $\mho$ la familia de todas las particiones finitas de Ω en conjuntos de $\rho[\Sigma] \setminus \{\emptyset\}$, al conjunto dirigido (por refinamiento) $\mho$ podemos asociarle la red

$$s_\pi = \sum_{A \in \pi} \frac{m(A)}{\mu(A)} \chi_A.$$

Como comentábamos en la introducción del apéndice B, si la medida m es representable por una función $f \in L^1(\mu, E)$ entonces la red anterior converge en μ-casi todo punto a f por un resultado de Kupka ([52, lemma 4.3, p. 202]). Podemos preguntarnos ahora, ¿qué ocurre si la medida no es necesariamente representable?.

En caso de que la medida m verifique que existe $C > 0$ tal que $\|m(A)\| \le C\mu(A)$ para cada $A \in \Sigma$ tendremos que la red $(s_\pi)_{\pi \in \mho}$ está acotada, y por el teorema de Alaoglu, contenida en un ω^*-compacto; de manera que podemos tomar límite (puntualmente) a través de cualquier ultrafiltro sobre $\mho$. Usando esta idea probaremos (lema C.2.2) que para toda medida m como antes la red converge μ-casi seguramente en la topología ω^* a una función ω^*-medible satisfaciendo para cada $A \in \Sigma$ las siguientes propiedades:

(I) $\langle x, m(A) \rangle = \int_A \langle x, \psi(t) \rangle\, d\mu$ para todo $x \in E$.
(II) $\psi(t) \in \overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(\Gamma_A)$ en μ-casi todo $t \in A$.

Las funciones ψ que verifiquen estas condiciones las denominaremos *derivadas de Gelfand* de m, y el hecho más remarcable sobre ellas es que la medida m es representable si y solo si ψ es medible. En ese caso se tiene además que ψ coincide en μ-casi todo punto con la derivada de Radon-Nikodým de m. Extenderemos estos resultados a medidas que toman valores en un Banach no necesariamente duales.

La última sección se dedica a cuantificar la propiedad de dentabilidad de los espacios de Banach introduciendo dos índices Dent y dent. Estudiaremos propiedades de estos índices (proposición C.3.5, corolario C.3.7), su relación con la representabilidad de medidas (teorema C.3.4), y finalmente combinaremos estos resultados para demostrar (proposición C.3.8) que

$$\mathrm{dent}(H) \le 2\gamma(H) \qquad (\delta)$$

para cualquier subconjunto convexo y acotado $H \subset E$: aquí γ es la medida de compacidad débil definida a través de los límites dobles

$$\gamma(H) := \sup\left\{\left|\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) - \lim_m \lim_n x_m^*(x_n)\right| : (x_m^*)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq B_{E^*}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H\right\}$$

donde el supremos se toma sobre aquellos valores para los que los límites anteriores existen.

Subrayar que muchas de estas desigualdades resumen importantes resultados de la teoría de la propiedad de Radon-Nikodým estudiados por otros autores.

La notación y terminologia es estándar. Dado un conjunto $D \subset E$ denotamos su *diámetro* como

$$\operatorname{diam}(D) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in D\}.$$

y su *radio* como

$$\operatorname{rad}(D) = \inf\{\delta > 0 : \text{ existe } x \in E \text{ tal que } D \subseteq B(x,\delta)\ \}.$$

La *envoltura convexa* de D se denota por $\operatorname{co}(D)$. Si además tomamos adherencia en la topología τ entonces lo denotaremos por $\overline{\operatorname{co}}^{\tau}(D)$.

Adoptamos el convenio $\inf \emptyset = +\infty$. Usaremos $+\infty$ suponiendo, como es usual, las siguientes reglas aritméticas: $\lambda \cdot (+\infty) = +\infty$ si $\lambda > 0$, y $\delta \leq +\infty$ para cada $\delta \in \mathbb{R}$.

Si $B \in \Sigma$, representamos por Σ_B^+ a la familia de todos los elementos de Σ contenidos en B y con μ-medida positiva. Escribimos Σ^+ en lugar de Σ_Ω^+. El *rango medio* de la medida original m lo denotaremos por

$$\operatorname{AR}(m) = \left\{\frac{m(C)}{\mu(C)} : C \in \Sigma^+\right\}.$$

Para cada $B \in \Sigma^+$ el *rango medio* de $m|_B$ se escribe como

$$\Gamma_B := \left\{\frac{m(C)}{\mu(C)} : C \in \Sigma_B^+\right\}.$$

Técnicamente hablando Γ_B depende de m y μ, pero ya que siempre trabajamos con estas medidas evitamos la tediosa terminología $\Gamma_B^{\mu,m}$ a no ser que sea estrictamente necesaria.

Por $L^\infty(\mu, E)$ denotamos las clases de equivalencia de las funciones fuertemente medibles que están μ-esencialmente acotadas $f : \Omega \to E$ equipado con la norma esencial del supremo $\|\cdot\|_\infty$, [26, p. 50].

C.1. Representabilidad de medidas

Definición C.1.1. *Dada una medida vectorial μ-continua de variación acotada $m : \Sigma \to E$, el* índice de representabilidad *$\mathscr{R}(m)$ de m se define como*

$$\mathscr{R}(m) := \inf\{\varepsilon > 0 : \textit{para cada } A \in \Sigma^+ \textit{ existe } B \in \Sigma_A^+ \textit{ tal que } \operatorname{rad}(\Gamma_B) < \varepsilon\}.$$

La siguiente proposición muestra que el índice anterior efectivamente mide cómo de lejos está m de ser una medida representbale.

Proposición C.1.2. *Sea $m:\Sigma\to E$ una medida vectorial como en la definición C.1.1. Si $\mathscr{R}(m)<\delta$ entonces existe una función $g\in L^1(\mu,E)$ que satisface*

$$\left\|m(A)-\int_A g\,d\mu\right\|\leq\delta\,\mu(A),\ \textit{para cada } A\in\Sigma. \tag{C.1}$$

Recíprocamente, si $\delta\geq 0$ satisface (C.1) *para alguna función Bochner integrable f entonces $\mathscr{R}(m)\leq\delta$.*

Demostración. Si $\mathscr{R}(m)=\infty$ podemos tomar $g=0$ y (C.1) es obviamente cierta. Si $\mathscr{R}(m)<\delta<+\infty$, entonces usando el lema de Zorn se puede encontrar una partición contable $\{B_n:n\in N\cup\{0\}\}$ ($N\subseteq\mathbb{N}$) de Ω con elementos de Σ de manera que

$$\mu(B_0)=0 \text{ y para cada } n\in N, \mu(B_n)>0 \text{ y } \operatorname{rad}(\Gamma_{B_n})<\delta.$$

Para cada $n\in N$ tomamos $x_n\in E$ verificando $\Gamma_{B_n}\subseteq B(x_n,\delta)$. Dado $A\in\Sigma$, para cada $n\in N$ tenemos que

$$\|m(A\cap B_n)-x_n\mu(A\cap B_n)\|\leq\delta\mu(A\cap B_n). \tag{C.2}$$

Además, si $\mu(A\cap B_n)=0$ entonces $m(A\cap B_n)=0$ y la desigualdad está clara. En otro caso $\mu(A\cap B_n)>0$ y (C.2) se sigue del hecho de que $\Gamma_{B_n}\subseteq B(x_n,\delta)$. Por un lado, tomando $A=\Omega$ en la desigualdad (C.2) y usando la desigualdad triangular se llega a que

$$\sum_{n\in N}\|x_n\|\mu(B_n)\leq|m|(\Omega)+\delta<+\infty,$$

y por consiguiente $g:=\sum_{n\in N}x_n\chi_{B_n}$ es integrable Bochner. Por otro lado, la desigualdad (C.2) implica que

$$\left\|m(A)-\int_A g\,d\mu\right\|\leq\sum_{n\in N}\|m(A\cap B_n)-x_n\mu(A\cap B_n)\|\leq\delta\mu(A).$$

Recíprocamente, supongamos que $\delta\geq 0$ verifica (C.1) para alguna función $g\in L^1(\mu,E)$ y todo $A\in\Sigma^+$. Como g es fuertemente medible, para cada $\varepsilon>0$ existe $B\in\Sigma_A^+$ tal que $\operatorname{diam}(g[B])<\varepsilon$. Fijamos $C\in\Sigma_B^+$. Se sigue entonces de la desigualdad (C.1) que

$$\left\|\frac{m(C)}{\mu(C)}-\frac{\int_C g\,d\mu}{\mu(C)}\right\|\leq\delta.$$

Por otro lado, [26, Corollary II.2.8] implica que

$$\frac{\int_C g\,d\mu}{\mu(C)}\in\overline{\operatorname{co}}(g[C])\subseteq\overline{\operatorname{co}}(g[B]).$$

Como $\operatorname{diam}(g[B]) = \operatorname{diam}(\overline{\operatorname{co}}(g[B])) < \varepsilon$, se deduce que

$$\left\| \frac{m(C)}{\mu(C)} - \frac{\int_B g\,d\mu}{\mu(B)} \right\| \leq \left\| \frac{m(C)}{\mu(C)} - \frac{\int_C g\,d\mu}{\mu(C)} \right\| + \left\| \frac{\int_C g\,d\mu}{\mu(C)} - \frac{\int_B g\,d\mu}{\mu(B)} \right\| < \delta + \varepsilon.$$

Por tanto $\operatorname{rad}(\Gamma_B) < \delta + \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$ y la prueba está completa. □

Se sigue de la proposición anterior que $\mathscr{R}(m)$ es el ínfimo de todos los $\delta > 0$ que satisfacen la desigualdad (C.1). Como consecuencia de ésto, si m es representable, i.e. si existe $f \in L^1(\mu, E)$ tal que $m(A) = \int_A f\,d\mu$ para cada $A \in \Sigma$, entonces el lema anterior implica que $\mathscr{R}(m) = 0$. El recíproco también es cierto: Supongamos que $\mathscr{R}(m) = 0$ y usemos repetidamente la desigualdad (C.1) con $\delta = 1/n$ para encontrar una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(\mu, E)$ tal que

$$\left\| m(A) - \int_A f_n\,d\mu \right\| \leq \frac{1}{n}\,\mu(A), \text{ para cada } A \in \Sigma.$$

En consecuencia

$$\left\| \int_A f_p\,d\mu - \int_A f_q\,d\mu \right\| \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \mu(A), \text{ para cada } A \in \Sigma.$$

La desigualdad anterior implica (ver [26, (iv),teorema 4, p. 46]) que

$$\int_A \|f_p - f_q\|\,d\mu \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \mu(A), \text{ para cada } A \in \Sigma.$$

Luego $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\mu, E)$, que debe ser convergente (completitud) a una función $f \in L^1(\mu, E)$. Si $A \in \Sigma$ podemos usar la desigualdad triangular para deducir que

$$\left\| m(A) - \int_A f\,d\mu \right\| \leq \frac{1}{n}\mu(A) + \|f - f_n\|_1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $m(A) = \int_A f\,d\mu$.

La siguiente proposición recoge algunas propiedades de $\mathscr{R}(\cdot)$.

Proposición C.1.3. *Sean $m, m' : \Sigma \to E$ medidas vectoriales μ-continuas de variación acotada y $\alpha \in \mathbb{R}$. El índice de representabilidad verifica las siguientes propiedades:*

(i) $\mathscr{R}(m + m') \leq \mathscr{R}(m) + \mathscr{R}(m')$.
(ii) Si $T : E \to F$ es un operador lineal acotado entonces $\mathscr{R}(T \circ m) \leq \|T\|\mathscr{R}(m)$.
(iii) $\mathscr{R}(\alpha m) = |\alpha|\mathscr{R}(m)$.

Demostración. Si $\mathscr{R}(m)$ o $\mathscr{R}(m')$ es infinito entonces la propiedad (i) está clara. Notar que si asumimos el convenio $0 \cdot (+\infty) = 0$ y $\mathscr{R}(m) = +\infty$ entonces (ii) también se satisface, luego supondremos que en ambos casos los índices son finitos.

(i) Supongamos que $\delta > \mathscr{R}(m)$, $\delta' > \mathscr{R}(m')$. Dado $A \in \Sigma^+$ existe $C \in \Sigma_A^+$ tal que $\mathrm{rad}(\Gamma_C^m) < \delta$. Pero podemos también encontrar $D \in \Sigma_C^+$ con $\mathrm{rad}(\Gamma_D^{m'}) < \delta'$, de manera que existen $x, x' \in E$ con $\Gamma_D^m \subseteq B(x,\delta)$ y $\Gamma_D^{m'} \subseteq B(x',\delta')$. Usando la desigualdad triangular deducimos que $\Gamma_D^{m+m'} \subseteq B(x+x', \delta+\delta')$, lo que conduce al resultado buscado.

(ii) Sea $T : E \to F$ un operador lineal acotado, entonces $T \circ m$ es una medida vectorial F-valuada. Observemos ahora que si $\Gamma_C^m \subseteq B(x,\delta)$ entonces $\Gamma_C^{T\circ m} \subseteq B(T(x), \|T\|\delta)$, luego $\mathscr{R}(T \circ m) \leq \|T\|\mathscr{R}(m)$.

(iii) Es una consecuencia de (ii). Si $\alpha = 0$ la relación es clara, mientras que $\alpha \neq 0$ implica que $T : E \to E$ dada por $T(x) = \alpha x$ verifica $\|T\| = 1/\|T^{-1}\| = \alpha$, de modo que $\mathscr{R}(m) \leq \frac{1}{|\alpha|}\mathscr{R}(T \circ m) \leq \mathscr{R}(m)$.

□

En los siguientes ejemplos calculamos los índices de representabilidad de algunos ejemplos bien conocidos de medidas que no son representables. El siguiente ejemplo suele aparecer como caso elemental de una medida que no es representable en [13, Example 2.1.2] y [26, Example III.1.2].

Ejemplo C.1.4. *Consideremos un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) donde μ es no atómica y sea $m : \Sigma \to L^1(\mu)$ la medida vectorial definida para cada $A \in \Sigma$ como*

$$m(A) := \chi_A.$$

Entonces $\mathscr{R}(m) = 1$.

Demostración. Es claro que m es una medida vectorial μ-continua cuyo rango medio $\mathrm{AR}(m)$ está contenido en B_E, luego $\mathscr{R}(m) \leq 1$. Como μ es no atómica, para cada $A \in \Sigma^+$ podemos encontrar dos conjuntos disjuntos $B, C \in \Sigma_A^+$. Por tanto

$$\left\| \frac{\chi_C}{\mu(C)} - \frac{\chi_D}{\mu(D)} \right\|_1 = \int_C \frac{1}{\mu(C)}\, d\mu + \int_D \frac{1}{\mu(D)}\, d\mu = 2$$

lo que significa que $\mathrm{rad}(\Gamma_A) \geq 1$ y consecuentemente $\mathscr{R}(m) \geq 1$. □

Ejemplo C.1.5. *Sea λ la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$ y Σ la familia de los conjuntos medibles Lebesgue. Para el espacio de Banach $E = c_0$ con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$, consideremos la medida vectorial $m : \Sigma \to c_0$ definida por*

$$m(A) = \left(\int_A r_n(t)\, d\lambda \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

donde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son las funciones de Rademacher. Entonces $\mathscr{R}(m) = 1$.

Demostración. Como $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal en $L^2(\lambda)$ podemos concluir que $m(A) \in c_0$ por la identidad de Parseval. Por otro lado, m es claramente una medida finitamente aditiva que satisface

$$\|m(A)\|_\infty \leq \lambda(A) \text{ para cada } A \in \Sigma.$$

De la desigualdad de arriba se sigue que m es numerablemente aditiva, λ-continua y de variación acotada. También deducimos que $\mathscr{R}(m) \leq 1$. Supongamos que existe una función $f \in L^1(\lambda, E)$, $f = (f_1, f_2, ...)$ y una constante $0 \leq c < 1$ tales que

$$\left\| m(A) - \int_A f \, d\lambda \right\|_\infty \leq c\,\lambda(A), \text{ para cada } A \in \Sigma.$$

En particular, cada componente verifica

$$\left| \int_A r_n(t)\, d\lambda - \int_A f_n \, d\lambda \right| \leq c\,\lambda(A), \text{ para cada } A \in \Sigma. \tag{C.3}$$

Por tanto

$$\int_A |r_n(t) - f_n(t)|\, d\lambda \leq c\,\lambda(A), \text{ para cada } A \in \Sigma. \tag{C.4}$$

Como consecuencia de la ecuación (C.4) se tiene que para cada n existe un conjunto λ-nulo $A_n \in \Sigma$ tal que $t \in [0,1] \setminus A_n$ implica $|r_n(t) - f_n(t)| \leq c$, de modo que $|f_n(t)| \geq 1 - c$. Por tanto, para cada $t \in [0,1] \setminus \bigcup_n A_n$ tenemos

$$|f_n(t)| > 1 - c, \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

lo que contradice el hecho de que f toma sus valores en c_0 casi seguramente. Podemos entonces concluir que $\mathscr{R}(m) \geq 1$. □

C.1.1. Representabilidad de operadores

Recordar que un operador lineal y continuo $T : L^1(\mu) \to E$ se dice que es (Riesz) representable si existe una función $g \in L^\infty(\mu, E)$ tal que

$$T(f) = \int_\Omega f g \, d\mu,$$

(ver [26, Section 1. Chapter III]). En este caso tenemos que $\|T\| = \|g\|_\infty$. El conjunto de todos los operadores representables es un subespacio cerrado de $\mathscr{L}(L^1(\mu), E)$ (el espacio de los operadores lineales y continuos de $L^1(\mu)$ en E) que denotaremos por $\mathscr{L}^{rep}(L^1(\mu), E)$.

Si T es un operador como antes, entonces la aplicación $m : \Sigma \to E$ definida como $m(A) = T(\chi_A)$ es una medida vectorial μ-continua cuyo rango medio está contenido en $T[B_{L^1(\mu)}]$. Por otro lado, cada medida vectorial μ-continua con rango medio acotado puede extenderse por linealidad y densidad de las funciones simples a un único operador $T \in \mathscr{L}(L^1(\mu), E)$ verificando $m(A) = T(\chi_A)$. La siguiente proposición es una versión cuantitativa de [26, lemma III.1.4].

Proposición C.1.6. *Sea $T : L^1(\mu) \to E$ un operador lineal acotado y $m : \Sigma \to E$ la medida vectorial definida como $m(A) = T(\chi_A)$ para cada $A \in \Sigma$. Entonces*

$$\mathscr{R}(m) = d(T, \mathscr{L}^{rep}(L^1(\mu), E)).$$

Demostración. Como $\mathrm{AR}(m)$ es un conjunto acotado, $\mathscr{R}(m)$ es necesariamente finito. Dado $\delta > \mathscr{R}(m)$ y de acuerdo con la proposición C.1.2 existe $g \in L^1(\mu, E)$ tal que

$$\left\| m(A) - \int_A g\, d\mu \right\| \leq \delta \mu(A), \text{ para cada } A \in \Sigma. \tag{C.5}$$

Como $\|m(A)\| \leq \|T\| \mu(A)$, la desigualdad (C.5) nos dice que

$$\left\| \int_A g\, d\mu \right\| \leq \big(\delta + \|T\|\big) \mu(A), \text{ para cada } A \in \Sigma.$$

Esta última desigualdad implica que

$$\int_A \|g\|\, d\mu \leq \big(\delta + \|T\|\big) \mu(A), \text{ para todo } A \in \Sigma,$$

de donde se sigue que $\|g\| \leq \delta + \|T\|$ en casi todo punto, y por tanto $g \in L^\infty(\mu, E)$.

Si $S : L^1(\mu) \to E$ es el operador representable dado por $S(f) = \int_A fg\, d\mu$ para cada $f \in L^1(\mu)$, entonces la desigualdad (C.5) puede verse también como

$$\|T(\chi_A) - S(\chi_A)\| \leq \delta\, \mu(A), \text{ para todo } A \in \Sigma.$$

De aquí obtenemos por linealidad y por la densidad de las funciones simples que

$$\|T(f) - S(f)\| \leq \delta \|f\|_1, \text{ para cada } f \in L^1(\mu),$$

lo que nos dice que $d(T, \mathscr{L}^{rep}(L^1(\mu), E)) \leq \delta$. Como $\delta > \mathscr{R}(m)$ es arbitrario concluimos que $d(T, \mathscr{L}^{rep}(L^1(\mu), E)) \leq \mathscr{R}(m)$.

La desigualdad recíproca $d(T, \mathscr{L}^{rep}(L^1(\mu), E)) \geq \mathscr{R}(m)$ se sigue de manera inmediata de la proposición C.1.2. □

C.2. Derivada de Gelfand

En esta sección haremos uso de las herramientas que hemos introducido en la sección anterior en el estudio de propiedades de medibilidad fuerte para derivadas en sentido débil*. Usaremos aquí los siguientes conceptos: Una función $\psi : \Omega \to E^*$ se dice que es ω^**-escalarmente medible* (resp. Gelfand integrable) si, para cada $x \in E$, la función $\langle x, \psi \rangle : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $t \mapsto \langle x, \psi(t) \rangle$ es medible (resp. integrable). Si ψ es Gelfand integrable, entonces para cada $A \in \Sigma$ existe un vector $\int_A \psi\, d\mu \in E^*$ (denominada *integral de Gelfand* de ψ sobre A) satisfaciendo $\langle x, \int_A \psi\, d\mu \rangle = \int_A \langle x, \psi \rangle\, d\mu$ para cada $x \in E$. Para información básica sobre la integral de Gelfand ver [3, 11.9] y [38] para la definición original.

Fijaremos un *lifting* $\rho : \Sigma \to \Sigma$ sobre (Ω, Σ, μ) y escribiremos $\mathscr{M} = \rho[\Sigma] \setminus \{\emptyset\}$. Denotamos por $\mho$ a la familia de todas las particiones finitas Ω en elementos de $\mathscr{M}$ ordenado por refinamiento $\succ$. Notar que $(\mho, \succ)$ es un conjunto dirigido.

Supongamos que $m : \Sigma \to E^*$ es una medida vectorial μ-continua de variación acotada. En [59, theorem 11.1, p. 236] Musial prueba que existe una función función Gelfand integrable $\psi : \Omega \to E^*$ tal que

$$\langle x, m(A) \rangle = \int_A \langle x, \psi(t) \rangle \, d\mu \tag{C.6}$$

para cada $A \in \Sigma$ y cada $x \in E$. Musial se refiere a una función ω^*-medible ψ que satisface (C.6) como una ω^*-densidad de m con respecto de μ.

Subrayar que incluso una medida representble m puede tener alguna función ω^*-densidad que sea "mala", tal y como el siguiente ejemplo sugiere (ver [59, example 3.1, p. 186] para los detalles).

Ejemplo C.2.1. *Sea λ la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$, Σ la familia de los conjuntos medibles Lebesgue y consideremos la medida vectorial nula $m : \Sigma \to \ell_2([0,1])$, $m(A) = 0$ para cada $A \in \Sigma$. Claramente la función nula es una ω^*-densidad de m fuertemente medible (de hecho es la derivada de Radon-Nikodým de m).*

Por otro lado, si denotamos por $\{e_t : t \in [0,1]\}$ la base canónica del espacio de Hilbert $\ell_2([0,1])$, la función $f : [0,1] \to \ell_2([0,1])$ definida como $f(t) = e_t$, $t \in [0,1]$ satisface que $\langle x, f(t) \rangle = 0$ en λ-casi todo punto para cada $x \in \ell_2([0,1])$.

Luego f es ω^*-medible y satisface la igualdad (C.6) *aunque no es fuertemente medible.*

Señalar que para cualquier lifting *ρ sobre $([0,1], \Sigma, \lambda)$ la construcción de Musial [59] conduce siempre a la función constantemente cero, ya que $\langle x, m \rangle \equiv 0$ implica $\rho(g_x) = 0$ por las propiedades del* lifting.

Vamos a dar una construcción diferente a la de Musial que nos va a permitir obtener funciones que verifican la ecuación (C.6) así como otra condición adicional que va a ser determinante para evitar casos patológicos como en el ejemplo anterior. Más aún, vamos a ver que dicha función puede obtenerse como el límite puntual de una red (en casi todo punto). Para cada $\pi \in \mho$ escribimos

$$s_\pi := \sum_{A \in \pi} \frac{m(A)}{\mu(A)} \chi_A.$$

Lema C.2.2. *Sea $m : \Sigma \to E^*$ una medida vectorial μ-continua de variación acotada. Para el* lifting *fijado ρ, la red $\{s_\pi : \pi \in \mho\}$ converge puntualmente μ-casi todo punto en la topología ω^* hacia una función $\psi : \Omega \to E^*$ que es ω^*-medible y satisface las siguientes propiedades para cada $A \in \Sigma$:*

(I) $\langle x, m(A) \rangle = \int_A \langle x, \psi(t) \rangle \, d\mu$

(II) $\psi(t) \in \overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(\Gamma_A)$ *en μ-casi todo $t \in A$.*

Demostración. Supongamos primero que existe $M > 0$ tal que $\|m(A)\| \leq M\mu(A)$ para cada $A \in \Sigma$. Si $t \in \Omega$ entonces $\{s_\pi(t) : \pi \in \mho\}$ es una red acotada en E^*. Si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro arbitrario sobre $\mho$ que contiene las colas $\{\pi : \pi \succcurlyeq \pi_0\}$ para todo $\pi_0 \in \mho$, entonces podemos construir una función $\psi : \Omega \to E^*$ definida en cada $t \in \Omega$ como

$$\psi(t) = \omega^*\text{-}\lim_{\pi, \mathscr{U}} s_\pi(t). \tag{C.7}$$

Fijado $x \in B_E$, sea $g_x \in L^\infty(\mu)$ la derivada de Radon-Nikodým de $\langle x, m(A)\rangle$. La correspondiente red $\langle x, s_\pi\rangle = \sum_{A\in\pi} \frac{\langle x,m(A)\rangle}{\mu(A)} \chi_A$ converge hacia g_x en $L^\infty(\mu)$ por [26, lemma 1, p. 67]. Usando el *lifting* previo extendido $\rho : L^\infty(\mu) \to M^\infty(\mu)$ tenemos que $\langle x, s_\pi\rangle = \rho(\langle x, s_\pi\rangle)$ converge hacia $\rho(g_x)$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$. En particular, tomando límite a través de $\mathscr{U}$ deducimos que ψ verifica

$$\langle x, \psi(t)\rangle = \rho(g_x)(t) \text{ para cada } t \in \Omega.$$

Ésto implica que el límite es independiente del ultrafiltro $\mathscr{U}$ elegido con la propiedad mencionada (de hecho, la función obtenida coincide con la construida por Musial), luego la red $s_\pi(t)$ es ω^*-convergente hacia $\psi(t)$ para cada $t \in \Omega$ por el apartado (e) del teorema 3.1.3.

Si $A \in \Sigma$ entonces $\mu(A \cap \rho(A)) = \mu(A)$ por las propiedades del *lifting*. También tenemos $\Gamma_A = \Gamma_{\rho(A)}$. En efecto, si $B \subseteq A$ entonces $\rho(B) \subseteq \rho(A)$ y $m(\rho(B)) = m(B)$ por la μ-continuidad, de manera que $\Gamma_A \subseteq \Gamma_{\rho(A)}$. Recíprocamente, si $B \subseteq \rho(A)$ entonces $B \setminus (A \cap B) \subseteq \rho(A) \setminus A$ luego $\mu(A \cap B) = \mu(B)$ y $m(A \cap B) = m(B)$. Si t pertenece a la intersección $A \cap \rho(A)$ entonces $\psi(t)$ es el ω^*-límite de $s_\pi(t)$ cuando tomamos particiones $\pi \succcurlyeq \{\rho(A), \Omega \setminus \rho(A)\}$, de modo que $\psi(t) \in \overline{\Gamma_{\rho(A)}}^{\omega^*} = \overline{\Gamma_A}^{\omega^*}$, lo que prueba la segunda afirmación.

Para el caso general fijemos una familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathscr{M}$-conjuntos disjuntos tales que $\mu(\Omega \setminus \bigcup_n A_n) = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $C_n > 0$ con $\|m(A \cap \Omega_n)\| \le C_n \mu(A)$ para cualquier $A \in \Sigma$. Una forma de construir una tal partición es tomar los conjuntos Ω_n como Musial [59, theorem 11.1, p. 236] y escribir $A_n = \rho(\Omega_n)$, que verifica las condiciones buscadas por las propiedades del *lifting*.

Notar que la restricción de ρ a Σ_{A_n} es un *lifting* sobre (A_n, Σ_{A_n}, μ), luego podemos aplicar la primera parte para deducir la existencia de una función $\psi_n : A_n \to E^*$ que es ω^*-medible y satisface las condiciones (I) y (II). Es claro que $\psi : \Omega \to E^*$ definida como $\psi = \sum_{n=1}^\infty \psi_n \chi_{A_n}$ es ω^*-medible. Además, si $x \in E$ entonces

$$\int_{\cup_{i=1}^n A_n} |\langle x, \psi\rangle| \, d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |\langle x, \psi\rangle| \, d\mu \le \sum_{i=1}^n |\langle x, m\rangle|(A_i) \le |m|(\Omega) < \infty$$

luego $\langle x, \psi\rangle \in L^1(\mu)$ por el teorema de la convergencia monótona. Además

$$\langle x, m(A)\rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x, m(A \cap A_n)\rangle = \sum_{n=1}^\infty \int_{A\cap A_n} \langle x, \psi_n\rangle \, d\mu = \int_A \langle x, \psi\rangle \, d\mu$$

para cada $A \in \Sigma$ por el teorema de la convergencia dominada.

Fijado $t \in A_n \subseteq \Omega$, ya que ρ es también un *lifting* sobre (A_n, Σ_{A_n}, μ) se sigue de la primera parte que si tomamos particiones $\pi \succcurlyeq \pi_0 = \{A_n, \Omega \setminus A_n\} \in \mho$ entonces $s_\pi(t)$ converge hacia $\psi_n(t) = \psi(t)$. Por tanto $\omega^*\text{-lím}_\pi s_\pi(t) = \psi(t)$ para cada $t \in \cup_{n=1}^\infty A_n$. $\square$

Definición C.2.3. *Diremos que una función ω^*-medible $\psi : \Omega \to E^*$ es una* derivada de Gelfand *de m si para cada $A \in \Sigma$ satisface las propiedades (I) y (II) del lema C.2.2.*

Si m es representable entonces su derivada de Radon-Nikodým $dm/d\mu$ satisface (C.6) luego es débilmente equivalente a cualquier derivada de Gelfand f de m en el sentido de que para cada $x \in E$

la función $\langle x, \frac{dm}{d\mu}\rangle$ coincide con $\langle x, f\rangle$ en μ-casi todo punto. Por supuesto, ésto no significa que f y $dm/d\mu$ deben coincidir en μ-casi todo punto (sólo podemos afirmar ésto si E es separable).

En [6] se introduce el siguiente índice de medibilidad (fuerte) de una función $f : \Omega \to E$:

$$\text{meas}(f) = \text{ínf}\,\{\varepsilon > 0 : \forall A \in \Sigma^+ \text{ existe } B \in \Sigma_A^+ \text{ tal que } \text{diam}(f[B]) < \varepsilon\}$$

Existe una relación entre la representabilidad de la medida m y la medibilidad fuerte de cualquier derivada Gelfand de m según se recoge en la siguiente proposición.

Proposición C.2.4. *Sea $m : \Sigma \to E^*$ una medida μ-continua de variación acotada y $\psi : \Omega \to E^*$ una derivada de Gelfand. Entonces*

$$\mathscr{R}(m) \leq \text{meas}(\psi) \leq 2\mathscr{R}(m).$$

Además, si $\mathscr{R}(m) = 0$ (o equivalentemente $\text{meas}(\psi) = 0$) entonces ψ es la derivada de Radon-Nikodým de m.

Demostración. Supongamos que $\text{meas}(\psi) < \varepsilon$, entonces para cada $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_A^+$ tal que $\text{diam}(\psi[B]) < \varepsilon$. Tomamos $y^* \in E^*$ verificando $\psi[B] \subseteq B(y^*, \varepsilon)$. Si $C \in \Sigma_B^+$ y $x \in B_E$ tenemos que

$$|\langle x, m(C)\rangle - \mu(C)\langle x, y^*\rangle| = \left| \int_C \langle x, \psi\rangle \, d\mu - \int_C \langle x, y^*\rangle \, d\mu \right| \leq \varepsilon\, \mu(C)$$

Tomando supremos en B_E se deduce que $\|m(C) - \mu(C)y^*\| \leq \varepsilon\, \mu(C)$. Por tanto, $\Gamma_B \subseteq B(y^*, \varepsilon)$ y $\text{rad}(\Gamma_B) < \varepsilon$, lo que prueba la primera desigualdad.

Fijemos ahora $\varepsilon > \mathscr{R}(m)$. Dado $A \in \Sigma^+$ existe $B \in \Sigma_A^+$ tal que $\text{rad}(\Gamma_B) < \varepsilon$. Pongamos que Γ_B está contenido en la bola $B_{E^*}(y^*, \varepsilon)$. Si C es el subconjunto de B que consta de todos los puntos $t \in B$ tales que $\psi(t)$ pertenece a esta bola entonces $C \in \Sigma_B^+$, ya que $\mu(C) = \mu(B)$ por la propiedad (II), y por tanto $\text{diam}(\psi[C]) < \varepsilon$. Ésto finaliza la prueba.

Supongamos ahora que $\mathscr{R}(m) = 0$ (o equivalentemente $\text{meas}(\psi) = 0$). Entonces m es una medida representable, luego existe una función Bochner integrable $f : \Omega \to E^*$ tal que $m(A) = \int_A f\, d\mu$ para cada $A \in \Sigma$. Fijado $\varepsilon > 0$ existe una partición contable de Ω, $\{A_n : n \in N \cup \{0\}\}$ ($N \subseteq \mathbb{N}$) tal que $\mu(A_0) = 0$ y para el resto $\mu(A_n) > 0$ y $\text{diam}(f[A_n]) < \varepsilon$. Usando que $\Gamma_{A_n} \subseteq \overline{\text{co}}(f[A_n])$ deducimos que $|f(t) - \psi(t)| < \varepsilon$ en μ-casi todo punto. Por tanto $\psi(t) = f(t)$ en μ-casi todo punto. □

Ahora supongamos que $m : \Sigma \to E$ es una medida μ-continua con rango medio acotado. Se puede ver como una medida E^{**}-valuada componiendo con el embebimiento canónico $E \subseteq E^{**}$. En este caso podemos construir una derivada de Gelfand $\psi : \Omega \to E^{**}$ de m. De acuerdo con la siguiente proposición podemos controlar cómo de lejos está la imagen $\psi[\Omega]$ de estar contenida en E en términos del índice $\mathscr{R}(m)$. Para ello usaremos la siguiente *distancia de Hausdorff no simétrica* de un conjunto A a otro B en un espacio métrico (X, d) dada por

$$\hat{\text{d}}(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}. \tag{C.8}$$

Teorema C.2.5. *Sea $m : \Sigma \to E$ una medida μ-continua de variación acotada y $\psi : \Omega \to E^{**}$ una derivada de Gelfand de m cuando cuando la vemos como una medida E^{**}-valuada. Entonces*

$$\mathscr{R}(m) \leq \mathrm{meas}(\psi) \leq 2\mathscr{R}(m)$$

y existe un conjunto μ-nulo D tal que

$$\hat{d}(\psi[\Omega \setminus D], E) \leq \mathscr{R}(m).$$

Demostración. La primera parte es consecuencia de la proposición C.2.4.

Fijado $\varepsilon > \mathscr{R}(m)$ podemos encontrar una familia contable $\{B_n : n \in N\}$ $(N \subseteq \mathbb{N})$ de subconjuntos disjuntos de Ω con medida positiva tales que $\mu(\bigcup_{n\in N} B_n) = 1$ y para cada $n \in N$ existe $y_n \in E$ con $\Gamma_{B_n} \subseteq B_E(y_n, \varepsilon)$. Por la propiedad (II), hay un conjunto μ-nulo D_ε tal que si $t \in \Omega \setminus D_\varepsilon$ entonces el elemento $\psi(t)$ pertenece a $\overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(\Gamma_{B_{n_0}})$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, luego $\psi(t) \in B_{E^{**}}(y_{n_0}, \varepsilon)$ y deducimos que $d(\psi(t), E) < \varepsilon$.
Finalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$ hemos probado que existe un conjunto μ-nulo D_k con

$$\hat{\mathrm{d}}(\psi[\Omega \setminus D_k], E) \leq \mathscr{R}(m) + \frac{1}{k}.$$

Por tanto, $D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ verifica la condición del enunciado. □

Vamos a calcular en los dos ejemplos que siguen las derivadas de Gelfand de medidas que no son representables.

Ejemplo C.2.6. *Sea $([0,1], \Sigma, \lambda)$ la medidad de Lebesgue y $m : \Sigma \to L^1(\lambda)$, $m(A) = \chi_A$. Una derivada de Gelfand de m es la función $\psi : [0,1] \to L^1(\lambda)^{**}$ que asocia a cada $t \in \Omega$ la medida finitamente aditiva $\nu_t : \Sigma \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\nu_t(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu(A) = 0 \text{ o } t \notin A \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además $\mathrm{meas}(\psi) = 2$ *y* $d(\psi(t), E) = 1$ *para cada* $t \in [0,1]$.

Demostración. El bidual $L^1(\lambda)^{**}$ consiste en el conjunto de todas las medidas (escalares) finitamente aditivas y λ- continuas en Σ con la norma dada por $|\nu|(\Omega)$ (ver [78, theorem 2.3, p. 53]) identificándose $L^1(\lambda)$ con el subespacio formado por aquellas medidas que son numerablemente aditivas. La función ψ está bien definida y verifica

$$\int_A \langle \chi_B, \nu_t \rangle \, d\lambda = \int_A \int_{[0,1]} \chi_B \, d\nu_t \, d\lambda = \int_A \nu_t(B) \, d\lambda = \lambda(A \cap B)$$

por la definición de ν_t. Por otro lado $\langle \chi_B, m(A) \rangle = \int_\Omega \chi_A \chi_B \, d\lambda = \lambda(A \cap B)$, luego $\psi(t)$ satisface (C.6) para cualesquiera $A \in \Sigma$ y $\chi_B \in L^\infty(\lambda)$. Por la linealidad esta ecuación se extiende a las funciones simples, y por densidad a todo $L^\infty(\lambda)$.

Fijemos ahora un lifting ρ sobre el espacio de probabilidad del enunciado. Para comprobar (II), fijado $A \in \Sigma$ vamos a ver que $\psi(s) \in \overline{\Gamma_A}^{\omega^*}$ para cada $s \in A \cap \rho(A)$. Para ello basta demostrar que todo entorno ω^*-abierto de s de la forma

$$W = \left\{ y^{**} \in L^1(\mu)^{**} : |\langle y^{**} - \psi(s), h_i \rangle| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \dots, m \right\},$$

donde los $h_i \in L^\infty(\lambda)$, corta a Γ_A. Como las funciones simples son densas en $L^\infty(\mu)$, podemos suponer que cada h_i es de la forma $h_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_j^i \chi_{\rho(A_j^i)}$, donde para todo $i = 1, \dots, m$ la familia $\{\rho(A_j^i) : j = 1, \dots, k_i\}$ constituye una partición finita de Ω. Si denotamos por C a la intersección de $\rho(A) \cap A$ con los elementos $\rho(A_j^i)$ que contienen a s, entonces $C \in \Sigma_A^+$ y además para cada i es

$$\left| \left\langle \frac{\chi_C}{\mu(C)} - \psi(s), h_i \right\rangle \right| = \left| \sum_{j=1}^{k_i} a_j^i \left(\frac{\mu(C \cap \rho(A_j^i))}{\mu(C)} - \nu_s(\rho(A_j^i)) \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^{k_i} a_j^i 0 \right| = 0.$$

Por tanto ψ es una derivada de Gelfand de m.

Dados dos puntos distintos $t, s \in A \in \Sigma^+$ podemos encontrar un conjunto $C \in \Sigma$ tal que $t \in C$, $s \in \Omega \setminus C$ siendo ambos conjuntos de medida positiva. Por tanto

$$\int_\Omega (\chi_C - \chi_{\Omega \setminus C})\, d(\nu_t - \nu_s) = \nu_t(C) + \nu_s(A \setminus C) = 2.$$

Como $\chi_C - \chi_{\Omega \setminus C}$ pertenece a la bola cerrada unidad de $L^\infty(\lambda)$, deducimos que $\|\nu_t - \nu_s\| \geq 2$. Ésto muestra que $\text{meas}(\psi) \geq 2$. Por otro lado, en el ejemplo C.1.4 se ve que $\mathscr{R}(m) = 1$, de modo que el teorema C.2.5 nos permite afirmar que $\text{meas}(\psi) = 2$.

Fijado $t \in [0,1]$ podemos encontrar una sucesión decreciente de conjuntos C_n que contiene a t y tal que $\lambda(C_n)$ converge hacia cero. Si $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ es una medida numerablemente aditiva y λ-continua entonces $\mu(C_n)$ también converge hacia cero. Tomando límite en la desigualdad

$$\|\nu_t - \mu\| \geq \left| \int_\Omega \chi_{C_n}\, d\nu_t - \int_\Omega \chi_{C_n}\, d\mu \right| = |1 - \mu(C_n)|$$

concluimos que $d(\psi(t), L^1(\lambda)) = 1$ □

El siguiente ejemplo es similar.

Ejemplo C.2.7. *Sea* $([0,1], \Sigma, \lambda)$ *como en el ejemplo anterior y consideremos la medida vectorial* $m : \Sigma \to c_0$ *del ejemplo C.1.5 dada por*

$$m(A) = \left(\int_A r_n(t)\, d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Una derivada de Gelfand de m *es la función* $\psi : \Omega \to \ell_\infty$ *dada por* $\psi(t) = (r_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$. *Además* $\text{meas}(\psi) = 2$, $d(\psi(t), c_0) = 1$ *para cada* $t \in [0,1]$.

Demostración. Es claro que todo conjunto $A \in \Sigma^+$ contiene dos elementos t, s tales que $r_n(t) = 1$ y $r_n(s) = -1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, lo que conduce a que meas$(\psi) = 2$. Por otro lado, $\psi(t)$ es una sucesión de 1's y -1's, luego se trata de un elemento de ℓ_∞ cuya distancia a c_0 es igual a uno.

Vamos a comprobar que ψ es efectivamente una derivada de Gelfand de m. Fijemos $A \in \Sigma^+$ arbitrario. Para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 = c_0^*$ tenemos que

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} x_n r_n(t)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A r_n(t) x_n\, d\mu$$

por el teorema de la convergencia dominada, lo que muestra (I).

Para ver la propiedad (II) tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$ el subconjunto A' de A que resulta de quitar de A aquellos $t \in A$ que son números diádicos, es decir, aquellos de la forma $t = k/2^n$ para todo $k, n \in \mathbb{N}$ (observar que son un conjunto de medida nula) así como de quitar los conjuntos de la forma $\{t \in A : (r_n(t))_{n=1}^m = (a_n)_{n=1}^m\}$ para algún $(a_n)_{n=1}^m \in \{-1,1\}^m$, $m \in \mathbb{N}$ y que tienen medida nula. Como hemos quitado una cantidad contable de conjuntos de medida nula deducimos que $A' \subseteq A$ y $\mu(A \setminus A') = 0$.

Vamos a comprobar que $(r_n(s))_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\Gamma_A}^{\omega^*}$ para cada $s \in A'$, lo que probará (II). Con el fin de simplificar la notación vamos a razonar que un entorno ω^*-abierto de $(r_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma

$$V = \left\{ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty : \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n(y_n - r_n(s)) \right| < \varepsilon \right\} \text{(para algún } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \text{).}$$

interseca a Γ_A. El caso de un entorno ω^*-abierto arbitrario es enteramente análogo aunque más tedioso de escribir. En primer lugar fijemos m_0 tal que $\sum_{n>m_0} |x_n| < \varepsilon/2$.

Si $s \in A'$ entonces $B := \{t \in A' : (r_n(t))_{n=1}^{m_0} = (r_n(s))_{n=1}^{m_0}\}$ es un conjunto de Σ con medida positiva (por la construcción de A') contenido en A, de manera que

$$\frac{\int_B r_n(t)\, d\mu}{\mu(B)} = \frac{r_n(s)\mu(B)}{\mu(B)} = r_n(s) \text{ para } n = 1, \ldots, m_0.$$

De este modo, $m(B)/\mu(B) \in V$ pues

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\frac{\int_B r_n(t)\, d\mu}{\mu(B)} - r_n(s) \right) \right| \leq 2 \sum_{n>m_0} |x_n| < \varepsilon.$$

□

C.3. Índices de dentabilidad

Para cada $x_0 \in E$ y $\varepsilon > 0$ escribimos

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in E : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Una rebanada de $A \subseteq E$ es un subconjunto no vacío S de la forma $S = A \cap H$ donde H es un semiespacio ω-abierto, i.e.

$$H = \{x \in E : \langle x, x^* \rangle < \alpha\},$$

para ciertos $x^* \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

El concepto de dentabilidad y su relación con la propiedad de Radon-Nikodým fue estudiado en prier lugar por Rieffel [64], quien mostró que un espacio de Banach E tiene la propiedad de Radon-Nikodým si todo subcojunto acotado de E es dentable. Huff [44] probó que eran de afirmaciones equivalentes.

Definición C.3.1. *Para cada subconjunto A de E definimos:*

- $\mathrm{Dent}(A) = \text{ínf}\,\{\varepsilon > 0 :$ *existe S rebanada de A con* $\mathrm{rad}(S) < \varepsilon\}$
- $\mathrm{dent}(A) = \sup\{\mathrm{Dent}(C) : C \subseteq A\}$

con el convenio $\text{ínf}\,\emptyset = +\infty$.

Notar que $\mathrm{Dent}(A) \leq \mathrm{rad}(A)$ para cada $A \subseteq E$.

En muchas referencias como [64], [26], [13] la dentabilidad de un conjunto es introducida de manera diferente y se puede relacionar de manera sencilla con el índice anterior usando el teorema de separación (ver [32, theorem 3.17, p. 69]).

Lema C.3.2. *Sea A un subconjunto de E. Entonces*

$$\begin{aligned}\mathrm{Dent}(A) &= \text{ínf}\,\{\varepsilon > 0 : \textit{ existe } C \subseteq A \textit{ con } \mathrm{rad}(C) < \varepsilon \textit{ y } A \not\subseteq \overline{\mathrm{co}}(A \setminus C)\ \}\\ &= \text{ínf}\,\{\varepsilon > 0 : \textit{ existe una rebanada } S \textit{ con } \alpha(S) < \varepsilon\}\\ &= \text{ínf}\,\{\varepsilon > 0 : \textit{ existe } C \subseteq A \textit{ con } \alpha(C) < \varepsilon \textit{ y } A \not\subseteq \overline{\mathrm{co}}(A \setminus C)\ \}\end{aligned}$$

donde α *es la medida de no compacidad de Kuratowski*

$$\alpha(A) = \text{ínf}\,\{\varepsilon > 0 : \textit{ existen } A_1, \ldots, A_n \textit{ tales que } A = \cup_i A_i \textit{ y } \mathrm{rad}(A_i) < \varepsilon\}$$

Demostración. Denotemos respectivamente por L_1, L_2 y L_3 a los ínfimos del enunciado de arriba hacia abajo. La igualdad $\mathrm{Dent}(A) = L_1$ es una consecuencia sencilla del teorema de separación [32, theorem 3.17, p. 69]. Si $C \subseteq A$ con $\mathrm{rad}(C) < \varepsilon$ y $A \not\subseteq \overline{\mathrm{co}}(A \setminus C)$ entonces dicho teorema nos permite encontrar una rebanada S de A contenida en $A \setminus \overline{\mathrm{co}}(A \setminus C) \subseteq C$. Recíprocamente, si S es una rebanada de A con $\mathrm{rad}(S) < \varepsilon$ basta tomar simplemente $C = S$.

Para la segunda igualdad notemos que $L_2 \leq \mathrm{Dent}(A)$ de manera obvia. Para probar el recíproco usaremos el lema de Asplund-Namioka-Bourgain ([13, theorem 3.4.1, p. 51]), que es también válido cuando se trabaja con radios en lugar de diámetros (la prueba es la misma). Sea $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ una descomposición de la rebanada $S = A \cap H$ of A en conjuntos de radio menor que ε. Razonaremos que existe una rebanada S' con $\mathrm{rad}(S') < \varepsilon$ por inducción en n. Si $n = 1$ entonces $S' = S$ tiene esta propiedad.

Si $n = 2$ podemos suponer que $A \subseteq \overline{\mathrm{co}}(A \setminus A_1)$, ya que en otro caso podemos usar el teorema de separación para obtener una nueva rebanada S' de A contenida en A_1. Escribimos $K_0 = \overline{\mathrm{co}}(A_0)$, $K_1 = \overline{\mathrm{co}}(A \cap H^c)$ y $J = \overline{\mathrm{co}}(A)$. Se trata de conjuntos cerrados convexos que verifican las siguientes condiciones:

1. $J \subseteq \overline{\text{co}}(A \setminus A_1) \subseteq \overline{\text{co}}K_0 \cup K_1$.
2. $\text{rad}(K_0) < \varepsilon$ y $K_0 \subseteq J$.
3. $J \setminus K_1 \neq \emptyset$ ya que si $J \setminus K_1 = \emptyset$ entonces $J \subseteq K_1 \subseteq H^c$ luego $S = A \cap H = \emptyset$, lo que es absurdo.

Usando el lema de Asplund-Namioka-Bourgain obtenemos que existe una rebanada S' de J con radio menor que ε.

Supongamos ahora que $n > 1$ y el resultado es válido para conjuntos que tienen una rebanada dividida en al menos n conjuntos de radio menor que ε. Por la hipótesis de inducción $A \setminus A_n$ tiene una rebanada $(A \setminus A_n) \cap H$ con radio menor que ε. Entonces $A \cap H$ es una rebanada de A que se puede descomponer como $A \cap H = ((A \setminus A_n) \cap H) \cup (A_n \cap H)$, i.e., dos conjuntos de radio menor que ε. Por el caso $n = 2$ concluimos el resultado.

Finalmente, $L_3 \leq L_1 = \text{Dent}(A)$ por definición. Por otro lado, si $L_3 < \delta$ y $C \subseteq A$ verifica $\alpha(C) < \delta$, $A \nsubseteq \overline{\text{co}}(A \setminus C)$, entonces por el teorema de separación existe una rebanda S de A contenida en C, de manera que $\alpha(S) < \delta$. Ésto prueba que $\text{Dent}(A) = L_2 \leq L_3$. □

Proposición C.3.3. *Si A es un subconjunto de E entonces*

$$\text{Dent}(A) = \text{Dent}(\text{co}(A)) = \text{Dent}(\overline{\text{co}}(A)).$$

Demostración. Es claro que $\text{Dent}(A) \leq \text{Dent}(\text{co}(A)) \leq \text{Dent}(\overline{\text{co}}(A))$ ya que toda rebanada de $\overline{\text{co}}(A)$ contiene una rebanada de $\text{co}(A)$ por densidad, y ésta a su vez contiene una rebanada de A por convexidad. Sólo tenemos que probar que $\text{Dent}(\overline{\text{co}}(A)) < \varepsilon$. Para ver la última afirmación fijamos $\varepsilon > \text{Dent}(A)$ y una rebanada $H \cap A$ de A con $\text{diam}(H \cap A) < \varepsilon$. Ahora definimos los siguientes conjuntos convexos y cerrados $K_0 = \overline{\text{co}}(H \cap A)$, $K_1 = \overline{\text{co}}(H^c \cap A)$ y $J = \overline{\text{co}}(A)$. Notemos que verifican las siguientes propiedades:

- $J \subseteq \overline{\text{co}}(K_0 \cup K_1)$.
- $K_0 \subseteq J$ y $\text{rad}(K_0) < \varepsilon$.
- $J \setminus K_1 \neq \emptyset$, ya que en otro caso $J = K_1 \subseteq H^c$ implica $A \cap H = \emptyset$.

Por tanto, podemos aplicar el lema de Asplund-Namioka-Bougain para radios [13, theorem 3.4.1, p. 51] y deducir que existe una rebanada S de J que contiene un punto de K_0 y que tiene radio menor que ε, luego $\text{Dent}(\overline{\text{co}}(A)) < \varepsilon$.

□

Teorema C.3.4. *Sea $m : \Sigma \to E$ una medida vectorial μ-continua de variación acotada. Entonces*

$$\mathscr{R}(m) := \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : \textit{para cada } A \in \Sigma^+ \textit{ existe } B \in \Sigma_A^+ \textit{ tal que } \text{Dent}(\Gamma_B) < \varepsilon\}.$$

Demostración. Si denotamos por L al ínfimo de la derecha, es claro que $L \leq \mathscr{R}(m)$ ya que $\text{Dent}(\Gamma_B) \leq \text{rad}(\Gamma_B)$ para cada $B \in \Sigma^+$. Para ver el recíproco, si $L = \infty$ entonces la igualdad es cierta. Supongamos que dicho ínfimo es finito y fijemos $\varepsilon > L$. Dado $A \in \Sigma^+$ existe $F \in \Sigma_A^+$ y una bola $B(z, \varepsilon)$ tal que $\Gamma_F \nsubseteq \overline{\text{co}}(\Gamma_F \setminus B(z, \varepsilon))$. Tomamos $E \in \Sigma_F^+$ con

$$\frac{m(E)}{\mu(E)} \notin \overline{\text{co}}(\Gamma_F \setminus B(z, \varepsilon)). \tag{C.9}$$

Si probamos que existe $B \in \Sigma_E^+ \subseteq \Sigma_A^+$ con $\Gamma_B \subseteq B(z,\varepsilon)$ entonces la prueba habrá terminado. Supongamos que para cada $D \in \Sigma_E^+$ existe $C \in \Sigma_D^+$ con $\left\|\frac{m(C)}{\mu(C)} - z\right\| \geq \varepsilon$. Probaremos que ésto conduce a contradicción. Construimos una familia maximal $\mathscr{C} = \{C_i : i \in N\}$ ($N \subseteq \mathbb{N}$) de subconjuntos disjuntos de E con medida positiva (tiene que ser contable ya que $\mu(E) < \infty$) que verifique

$$\left\|\frac{m(C_i)}{\mu(C_i)} - z\right\| \geq \varepsilon, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Si escribimos $C_0 = \bigcup_{n\in N} C_n$ entonces $\mu(A_0 \setminus C_0) = 0$ por maximalidad. Por tanto

$$\frac{m(E)}{\mu(E)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(C_i)}{\mu(C_0)} \frac{m(C_i)}{\mu(C_i)} \in \overline{\mathrm{co}}(\Gamma_F \setminus B(z,\varepsilon)),$$

lo que contradice (C.9). □

Como consecuencia del teorema anterior, si $\mathrm{dent}(\mathrm{AR}(m)) = 0$ entonces $\mathscr{R}(m) = 0$, luego m es representable.

C.3.1. Relación con los índices de compacidad débil

Es bien conocido que todo conjunto débilmente compacto es dentable ([13, theorem 3.6.1, p. 60]). Daremos una versión cuantitativa de este resultado usando el siguiente índice de compacidad débil

$$\gamma(H) = \sup\left\{\left|\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) - \lim_m \lim_n x_m^*(x_n)\right| : (x_m^*)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq B_{E^*}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H\right\}$$

donde el supremo se toma sobre todos los posibles valores para los que los límites anteriores existen. En primer lugar, vamos a probar que el índice de dentabilidad de un conjunto cerrado convexo depende del índice de dentabilidad de sus subconjuntos contables.

La siguiente proposición es una versión cuantitativa de 8) $\Rightarrow$ 11) en [13, theorem 2.3.6, p. 31]. Sin embargo, la prueba que ofrecemos es distinta y permite eliminar las hipótesis de que el conjunto sea cerrado y convexo.

Proposición C.3.5. *Sea C un subconjunto acotado de E. Entonces*

$$\mathrm{Dent}(C) \leq 2 \sup\{\mathrm{Dent}(A) : A \subseteq C,\ A \text{ es contable}\} \tag{C.10}$$

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Dent}(C) > \delta$. Vamos a construir una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de C tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface

(a) $A_{n+1} \cap B(z,\delta) = \emptyset$ para todo $z \in \bigcup_{i=1}^n A_i$.
(b) $\mathrm{co}(A_{n+1}) \cap B(z, \frac{1}{n+1}) \neq \emptyset$ para cada $z \in \bigcup_{i=1}^n A_i$.

A partir de aquí la prueba se sigue de manera fácil, ya que el conjunto contable $A = \bigcup_n A_n$ verifica $\mathrm{Dent}(A) \geq \delta/2$. Para ver esta última afirmación tomemos cualquier subconjunto F de A

con radio menor que $\delta/2$. Si $z \in F$ entonces F está contenido en $B(z,\delta)$. Dicho z pertenece a un A_n para algún $n \in \mathbb{N}$, luego

$$A \cap B(z,\delta) \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \overline{\text{co}}(\cup_{i=n+1}^{\infty} A_i) \subseteq \overline{\text{co}}(A \setminus B(z,\delta))$$

por las propiedades (a) y (b), luego $A \subseteq \text{co}\,(A \setminus B(z,\delta))$.

Vamos a construir ahora una tal familia por inducción. Fijamos un punto arbitrario $A_1 = \{x\}$ de C. Dado que $x \in C \subseteq \overline{\text{co}}(C \setminus B(x,\delta))$ podemos encontrar una familia finita de puntos en $C \setminus B(x,\delta)$, cuya envoltura convexa interseca a la bola $B(x,1/2)$. Tomamos A_2 como dicha familia de puntos.

Por inducción, supongamos que hemos construido $(A_i)_{i=1}^{n}$ verificando las condiciones (a) y(b), y llamemos $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Como $\alpha(\bigcup_{z\in F_n}(B(z,\delta)\cap C)) < \delta$ tenemos que

$$C \subseteq \overline{\text{co}}\left(C \setminus \bigcup_{z\in F_n} B(z,\delta)\right).$$

Para cada $z_0 \in F_n$ existe una familia finita de puntos en $C \setminus \bigcup_{z\in F_n} B(z,\delta)$ cuya envoltura convexa interseca a la bola abierta $B(z_0, \frac{1}{n+1})$. Sea A_{n+1} el conjunto formado por dichas familias finitas para cada $z_0 \in \bigcup F_n$. Éste es un conjunto finito de puntos que satisface (a) y (b) por construcción. $\square$

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que la constante 2 en (C.10) no puede ser mejorada, ni siquiera cuando C es cerrado y convexo.

Ejemplo C.3.6. *Sea $\ell_\infty([0,1])$ la familia de todos las funciones con valores reales y acotadas definidas sobre $[0,1]$ equipado con la norma del supremo. Sea E el subespacio de $\ell_\infty([0,1])$ que contiene a todas las funciones con soporte numerable y C el subconjunto de E que consiste en todas las funciones f cuyo rango está contenido en $[0,2]$. Entonces E es un espacio de Banach con la norma inducida, C es convexo y cerrado,* $\text{Dent}(C) = 2$ *pero* $\text{Dent}(A) \leq 1$ *si $A \subseteq C$ es numerable.*

Demostración. Notar que E es un subespacio cerrado ya que el límite de una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la norma del supremo tiene soporte contenido en la unión de los soportes de las funciones f_n, el cual es un conjunto contable. Por tanto $(E, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Es claro que C es convexo y cerrado en E.

- *Si A es un subconjunto contable de C entonces* $\text{rad}(A) \leq 1$, *y por tanto* $\text{Dent}(A) \leq 1$.
  Si S es la unión de los soportes de las funciones pertenecientes a A, entonces S debe ser numerable. De este modo, la función característica χ_S verifica que $A \subseteq B(\chi_S, 1)$.
- *Si $A \subseteq C$ satisface* $\text{rad}(A) < \delta$ *entonces* $C \subseteq \overline{\text{co}}(C \setminus A)$. *Por tanto* $\text{Dent}(C) = 2$.
  Sólo tenemos que probar que bajo las condiciones anteriores C está contenido en $\overline{\text{co}}(C \setminus A)$. Para ello, notemos que si $A \subseteq B(f,\delta)$ para algún $0 < \delta < 2$ y $f \in E$ entonces para cada $t \notin S$ (S es el soporte def f) tenemos que $g(t) \in [0,\delta]$ para cada $g \in A$. Ahora tomamos un elemento arbitrario $g \in C$ y fijemos $m \in \mathbb{N}$. Como S es numerable, podemos encontrar m puntos $t_1, \ldots, t_m \in [0,1] \setminus (S \cup \text{support}(g))$. Definimos las funciones $g_1, \ldots, g_m$ como $g_i = g + 2\chi_{\{t_i\}}$. Entonces
  $$\left|\frac{g_1(t) + \ldots + g_m(t)}{m} - g(t)\right| \leq \frac{2}{m}$$

y $g_i \in C \setminus A$ ya que $g_i(t_i) > \delta$ para $t_i \notin S$.
Ésto prueba que $\mathrm{Dent}(A) \geq 2$, pero como $\mathrm{rad}(A) = 2$ concluimos que $\mathrm{Dent}(A) = 2$ necesariamente.

□

Una consecuencia inmediata de la proposición previa es el siguiente corolario.

Corolario C.3.7. *Sea C un subconjunto cerrado convexo de E. Entonces tenemos que*

$$\mathrm{dent}(C) \leq 2 \sup\{\mathrm{Dent}(A) : A \subseteq C \textit{ es contable}\}.$$

En la prueba de [20, proposition 2.2, p. 4] se muestra que $d(C, \overline{C}^{\omega^*}) \leq \gamma(C)$ para todo subconjunto convexo C de E. Ésto nos permite probar la siguiente versión cuantitativa de [13, theorem 3.6.1, p. 60].

Proposición C.3.8. *Sea C un subconjunto acotado convexo de E. Entonces*

$$\mathrm{dent}(C) \leq 2\,\gamma(C).$$

Demostración. Supondremos que C es ω-cerrado, ya que si es cierto en este caso deducimos fácilmente que $\mathrm{dent}(C) \leq \mathrm{dent}(\overline{C}^{\omega}) \leq \gamma(\overline{C}^{\omega}) = \gamma(C)$.

Fijemos $r > \gamma(C)$. Dado un subconjunto contable A de C, vamos a probar que $\mathrm{Dent}(A) \leq r$. Podemos asumir que A es denso en $\mathrm{co}(A)$ en la topología de la norma. En otro caso podemos tomar un subconjunto más grande $A \subseteq A_0 \subseteq \mathrm{co}(A)$ que también es numerable y satisface esta propiedad. Para ver que esta hipótesis no afecta al resultado final supongamos que H es un semiespacio ω-abierto tal que $H \cap A_0 \neq \emptyset$ y $\mathrm{rad}(H \cap A_0) < r$. Entonces tenemos que $H \cap A \neq \emptyset$ (porque $A \subseteq H^c$ implica $A_0 \subseteq \mathrm{co}(A) \subseteq H^c$) y $\mathrm{rad}(A \cap H) < r$.

Tomamos el conjunto de los puntos extremales $D = \mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(A)) \subseteq E^{**}$. Usando que $r > \gamma(C) \geq \gamma(\mathrm{co}(A)) \geq \hat{\mathrm{d}}(\mathrm{co}(A), \overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(A))$ deducimos que $\hat{\mathrm{d}}(\mathrm{co}(A), \overline{D}^{\omega^*}) < r$, y por tanto

$$\overline{D}^{\omega^*} = \bigcup_{a \in A} \left(\overline{D}^{\omega^*} \cap B_{E^{**}}[a, r] \right)$$

es una unión de subconjuntos ω^*-cerrados de $\overline{D}^{\omega^*}$. Ya que el teorema de Baire es válido para conjuntos compactos, existe $a \in A$ tal que el interior $\mathrm{int}_{\omega^*}(\overline{D}^{\omega^*} \cap B_{E^{**}}[a, r]) \neq \emptyset$, luego podemos encontrar un conjunto ω^*-abierto V tal que

$$\emptyset \neq V \cap \overline{D}^{\omega^*} \subseteq \overline{D}^{\omega^*} \cap B_{E^{**}}[a, r].$$

Notemos que $\mathrm{rad}(V \cap \overline{D}^{\omega^*}) < r$. Los conjuntos $K = \overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(A)$, $K_0 = \overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(D \cap V)$ and $K_1 = \overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(D \setminus V)$ tenemos que éstos son conjuntos convexos ω^*-cerrados que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\mathrm{rad}(K_0) \leq r$.
2. $K \subseteq \overline{\mathrm{co}}^{\omega^*}(K_1 \cup K_0)$ ya que $\mathrm{Ext}(K) = D \subseteq K_0 \cup K_1$.

3. $K \setminus K_1 \neq \emptyset$, pues en otro caso $K = K_1$ luego $D = \mathrm{Ext}(K) \subseteq \overline{D}^{\omega^*} \setminus W$ por el teorema de Milmann.

El lema de Asplud-Bourgain-Namioka permite afirmar que existe un semiespacio ω^*-abierto

$$H = \{x^{**} \in E^{**} : \langle x^{**}, y^* \rangle < \lambda\}$$

tal que $H \cap K \neq \emptyset$ y $\mathrm{rad}(H \cap K) \leq r$. Se sigue que $W = E \cap H$ es un semiespacio ω-abierto en E tal que $H \cap E \neq \emptyset$ y $\mathrm{rad}(H \cap A) \leq r$, de manera que $\mathrm{Dent}(A) \leq r$. Usando el corolario C.3.7 se concluye el resultado.

□

Finalizamos el capítulo con un resultado que cuantifica el hecho de que todo operador $T : L^1(\mu) \to E$ débil-compacto (i.e. $T[B_{L^1(\mu)}]$ es débil-compacto) es representable..

Corolario C.3.9. *Sean (Ω, Σ, μ) es un espacio de probabilidad y $T : L^1(\mu) \to E$ un operador lineal y continuo. Entonces*

$$d(T, \mathscr{L}_{rep}(L^1(\mu), E)) \leq \mathrm{dent}(T[B_{L^1(\mu)}]) \leq 2\,\gamma(T[B_{L^1(\mu)}]).$$

Demostración. Sea $m : \Sigma \to E$ la medida vectorial definida como $m(A) = T(\chi_A)$ para cada $A \in \Sigma$, sabemos por la proposición C.1.6 que $d(T, \mathscr{L}_{rep}(L^1(\mu), E)) = \mathscr{R}(m)$. Usando la caracterización de $\mathscr{R}(m)$ en términos de los índices de dentabilidad vista en el teorema C.3.4 llegamos a que $\mathscr{R}(m) \leq \mathrm{dent}(\mathrm{AR}(m))$. Ahora bien, notar que el rango medio de esta medida verifica

$$\mathrm{AR}(m) = \left\{ \frac{T(\chi_A)}{\mu(A)} : A \in \Sigma^+ \right\} \subseteq T[B_{L^1(\mu)}],$$

de modo que $\mathscr{R}(m) \leq \mathrm{dent}(T[B_{L^1(\mu)}])$, lo que prueba la primera desigualdad. La segunda desigualdad es consecuencia de la proposición C.3.8. □

Bibliografía

[1] Fernando Albiac and Nigel J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Springer Inc., 2006.

[2] David J. Aldous, *Subspaces of L^1, via random measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), no. 2, 445–463. MR 626483 (83b:46025)

[3] C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite dimensional analysis*, third ed., Springer, Berlin, 2006, A hitchhiker's guide. MR MR2378491 (2008m:46001)

[4] R. A. Alo and H. L. Shapiro, *Normal bases and compactifications*, Math. Ann. **175** (1968), 337–340.

[5] ______, *A note on compactification and semi-normal spaces*, J. of Aust. Math. Soc. **8** (1968), 102–108.

[6] C. Angosto, B. Cascales, and J. Rodríguez, *Distances to spaces of measurable and integrable functions*, To appear in Math. Nachr., 2013.

[7] S. Argyros, S. Negrepontis, and Th. Zachariades, *Weakly stable Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics **57** (1987), no. 1, 68–88.

[8] R. Armario, F. J. García-Pacheco, and F. J. Pérez-Fernández, *On vector-valued Banach limits*, sadas **2** (1991), 123.

[9] Antonio Avilés, Bernardo Cascales, Vladimir Kadets, and Alexander Leonov, *The Schur theorem for filters*, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry **3** (2007), no. 4, 1–16.

[10] Stefan Banach, *Théorie des opérations linéaires*, (1932).

[11] F. Bohnenblust, *An axiomatic characterization of l_p-spaces*, Duke J. Math. **6** (1940), 627–640.

[12] Nicolas Bourbaki, *Topologie Générale, chapitres 1-4*, Hermann, 1971.

[13] Richard David Bourgin, *Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodým property*, vol. 993, Springer-Verlag Berlin, 1983.

[14] A. Brunel and L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Theory of Computing Systems **7** (1973), no. 3, 294–299.

[15] C. Caratheodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender*, Math. Ann. **73** (1913), 323–370.

[16] Henri Cartan, *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 777–779.

[17] ______, *Théorie des filtres*, C. R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 595–598.

[18] B. Cascales, V. Kadets, and J. Rodríguez, *Radon-Nikodým Theorems for Multimeasures in Non-Separable Spaces*, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry **9** (2013), no. 1, 7–24.

[19] B Cascales and L Oncina, *Compactoid filters and usco maps*, Journal of mathematical analysis and applications **282** (2003), no. 2, 826–845.

[20] Bernardo Cascales, Ondřej F.K. Kalenda, and Jiří Spurnỳ, *A quantitative version of James's Compactness Theorem*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2) **55** (2012), no. 02, 369–386.

[21] Bernardo Cascales, José Manuel Mira, José Orihuela, and Matías Raja, *Análisis funcional*, Ediciones Electolibris, 2002.

[22] W. W. Comfort, *Ultrafilters: some old and some new results*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), no. 4, 417–455. MR 0454893 (56 #13136)

[23] John B Conway, *A course in functional analysis*, vol. 96, Springer, 1990.

[24] D. Dacunha-Castelle and J Krivine, *Application des ultraproduits a l'etude des espaces et des algebres de Banach*, Studia Mathematica **41** (1972), no. 3, 315–334.

[25] J. Diestel, *A survey of results related to the Dunford-Pettis property*, Contemporary Math **2** (1980), 15–60.

[26] Joseph Diestel and John J. Uhl Jr, *Vector measures*, vol. 15, Amer Mathematical Society, 1977.

[27] Szymon Dolecki, Gabriele H Greco, and Alojzy Lechicki, *Compactoid and compact filters*, Pacific J. Math **117** (1985), no. 1, 69–98.

[28] R. M. Dudley, *Real analysis and probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[29] Aryeh Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Jerusalem Academic Press, Jerusalem, 1961, pp. 123–160. MR 0139079 (25 #2518)

[30] Manfred Leopold Einsiedler and Thomas Ward, *Ergodic Theory: with a view towards Number Theory*, vol. 259, Springer, 2011.

[31] Ryszard Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, 1989.

[32] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos Santalucía, Jean Pelant, and Václav Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer-Verlag New York, Inc, 2001.

[33] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos Santalucía, and Václav Zizler, *Banach Space Theory. the Basis for Linear and Nonlinear Analysis.*, Springer-Verlag New York, Inc, 2011.

[34] Ilijas Farah, *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, no. 702, Amer Mathematical Society, 2000.

[35] D. H. Fremlin, *Consequences of Martin's axiom*, Cambridge University Press, 1984.

[36] Orrin Frink, *Compactifications and semi-normal spaces*, American Journal of Mathematics **86** (1964), no. 3, 602–607.

[37] M. Ganichev and V. Kadets, *Filter convergence in Banach spaces and generalized bases.*, Banakh, Taras (ed.), General topology in Banach spaces. Huntington, NY: Nova Science Publishers. 61-69 (2001)., 2001.

[38] Izrail Moiseevich Gelfand, *Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires*, Comm. Inst. Sci. Math. de Kharko **13** (1936), no. 4, 35–40.

[39] Leonard Gillman and Meyer Jerison, *Rings of Continuous Functions*, D. Van Nostrand Company, 1960.

[40] Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, and Joel H. Spencer, *Ramsey theory*, vol. 2, Wiley New York, 1980.

[41] Sylvie Guerre-Delabrière, *Classical sequences in Banach spaces*, vol. 166, CRC Press, 1992.

[42] María Muñoz Guillermo, *Índice de K-determinación de espacios topológicos y σ-fragmentabilidad de aplicaciones.*, Tesis Doctotral, 2004.

[43] Christopher Heil, *A basis theory primer*, School of Mathematics Georgia Institute of Technology Atlanta, Georgia, 1998.

[44] R.E. Huff, *Dentability and the Radon-Nikodým property*, Duke Mathematical Journal **41** (1974), no. 1, 111–114.

[45] José Iovino, *On sequences that are asymptotically equivalent to ℓ_p or c_0.*

[46] Meyer Jerison, *A property of extreme points of compact convex sets.*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), no. 5, 782–783.

[47] Meyer Jerison, *The set of all generalized limits of bounded sequences*, Canad. J. Math **9** (1957), no. 1, 79–89.

[48] Alexander S Kechris and Alexander S Kechris, *Classical descriptive set theory*, vol. 156, Springer-Verlag New York, 1995.

[49] Tomasz Kochanek, *$\mathscr{F}$-bases with brackets and with individual brackets in Banach spaces.*, Stud. Math. **211** (2012), no. 3, 259–268.

[50] J.L. Krivine and B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, Israel J. Math. **39** (1981), no. 4, 273–295. MR 636897 (83a:46030)

[51] Kenneth Kunen and Jerry Vaughan, *Handbook of set-theoretic topology.*, (1984).

[52] Joseph Kupka, *Radon-Nikodým theorems for vector valued measures*, Transactions of the American Mathematical Society **169** (1972), 197–217.

[53] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. i and ii. sequence spaces*, 1977.

[54] J. Lindestrauss and L. Tzafiri, *On Orlicz sequence spaces*, Israel J. Math **10** (1971), 379–390.

[55] Alain Louveau and Boban Velickovi, *Analytic ideals and cofinal types*, Annals of Pure and Applied Logic **99** (1999), no. 1, 171–195.

[56] B. Maurey and G. Pisier, *Series de variables aléatoires independantes et proprietés geometriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58** (1976), 45–90.

[57] Krzysztof Mazur, *f_σ ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebra $\mathscr{P}(\omega)/I$*, Fundamenta Mathematicae **138** (1991), no. 2, 103–111.

[58] James R. Munkres, *Topology. 2nd ed*, NJ: Prentice Hall, Inc., 2000.

[59] K. Musial, *Topics in the theory of Pettis integration*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **23** (1991), no. 1, 177–262 (1993), School on Measure Theory and Real Analysis (Grado, 1991). MR MR1248654 (94k:46084)

[60] I Namioka, *Separate continuity and joint continuity.*, Pacific Journal of Mathematics **51** (1974), no. 2, 515–531.

[61] Olav Njastad, *On Wallman-type Compactifications*, Math Zeit **91** (1966), 267–276.

[62] G. Preuss, *Foundations of General Topology*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[63] H. Reitberger, *The contributions of L. Vietoris and H. Tietze to the foundations of general topology*, Handbook of the history of general topology **1** (1997), 31–40.

[64] M. A. Rieffel, *Dentable subsets of Banach spaces, with application to a Radon-Nikodým theorem*, Functional Analysis (Proc. Conf., Irvine, Calif., 1966), Academic Press, London, 1967, pp. 71–77. MR 0222618 (36 #5668)

[65] F. Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti IV Congresso Internaz. Mat. (1908), 18–24.

[66] Luis Blanco Román, *Copias de ℓ^p en espacios de Banach*, Memoria, 1984.

[67] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing ℓ^1*, Proceedings of the National Academy of Sciences **71** (1974), no. 6, 2411–2413.

[68] ______, *Some remarks concerning unconditional basic sequences*, Longhorn Notes: Texas Functional Analysis Seminar, vol. 83, 1982, pp. 15–48.

[69] Walter Rudin, *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*, Duke Mathematical Journal **23** (1956), no. 3, 409–419.

[70] Sławomir Solecki, *Analytic ideals and their applications*, Annals of Pure and Applied Logic **99** (1999), no. 1, 51–72.

[71] Marshall Harvey Stone, *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37–111.

[72] Stevo Todorcevic, *Topics in Topology*, Springer-Verlag Berlín Heidelberg, 1997.

[73] Tim Traynor, *An elementary proof of the lifting theorem*, Pacific J. Math **53** (1974), no. 1, 267–272.

[74] B. S. Tsirelson, *Not every Banach space contains an imbedding of ℓ^p or c_0*, Funct. Analysis applic. **8** (1974), 138–141.

[75] Stanislaw Ulam, *Concerning functions of sets*, Fund. math. **14** (1929), 231–233.
[76] Russell C. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, vol. 6, Springer-Verlag, 1974.
[77] Henry Wallman, *Lattices and topological spaces*, Annals of Mathematics **42** (1938), no. 2, 687–697.
[78] Kôsaku Yosida and Edwin Hewitt, *Finitely additive measures*, Trans. Amer. Math. Soc **72** (1952), no. 1, 46–66.
[79] Wiesław Żelazko, *Banach algebras*, Elsevier Pub. Co., 1973.

Índice alfabético